ELEMENTA ARITHMETICAE, ALGEBRAE ET GEOMETRIAE...

François Jacquier

5.8.262

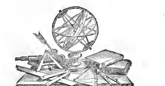
5.8.262 A

5.2.262

ELEMENTA ARITHMETICÆ, ALGEBRÆ ET GEOMETRIÆ

INSTITUTIONIBUS PHYSICIS PRÆMITTENDA

AUCTORE
FRANCISCO JACQUIER
EX MINIMORUM FAMILIA
PRIMARIARUM PER EUROPAM
ACADEMIARUM SOCIO
IN LYCEO ROMANO ET IN COLLEGIO
URBANO DE PROPAGANDA FIDE
PROFESSORE



ROMÆ MDCCLX.

APUD FRATRES PALEARINIOS
PRÆSIDUM FACULTATE.

AUCTOR LECTORI

PHyſicam inter Geometricamque doctrinam tam arcta eſt neceſſitudo ut apud omnes cultiores viros tanquam vaniſſimum meritò habeatur phyſices ſtudium, Geometriæ præſidio deſtitutum. Quæ cum ità ſint, nemo mirari debet quod a ſtudioſis adoleſcentibus, ſacræ licet Theologiæ deſtinatis, Arithmeticæ & Geometriæ Elementa requiram; ſi enim his careant doctrinæ Phyſicæ adjumentis, ſatius eſt eos huic præclariſſimo ſtudio valedicere omninò; *melius eſt nihil ſcire quam malè ſcire*; tale enim cognitionis, potiùs dicam, ignorantiæ genus mentis aciem hebetat rectumque judicium corrumpit, & omni ſtudiorum generi nocet plu-

rimum. At me fortaſſe reprehendent cenſores aliqui quod nova elementa ediderim, cum nihil ferè in orbe litterario frequentius ſit Elementorum libris. Neque talem me eſſe quis ſibi falsò perſuadeat ut de aliis elementis minus laudabiliter ſentiam, huncque meum libellum ſuprà alios omnes extollam, quod tamen a pleriſque Elementorum auctoribus nimis arroganter factum video. Et quidem variis Elementis ratione licèt & methodo diverſiſſimis ſuam juſtam laudem concedendam eſſe facile quiſque fatebitur, ſi varias attenderit adoleſcentum conditiones atque voluntates. Alii ſublimiorem Phyſicam Matheſimque univerſam addiſcere, & funditùs haurire ſibi proponunt; alii autem aliis ſtudiis gravioribuſque negotiis nati inſtitutiones geometricas ſtrictim leviterque tantùm arripiunt, quantum ſcilicèt expoliendo perſiciendoque ingenio ſatis eſt. Alii ultrà Geometriam quam *practicam* vocant, nolunt progredi, illaque minùs

nùs nobili geometriæ parte contenti ſunt; alii tandem alios fines aliaque conſilia in animo habent. Quid ei gò mirum quod ego Arithmeticæ & Geometriæ Elementa ad meas phyſicas inſtitutiones accomodatiſſima proponam. At quæcumque ſit Elementorum ratio, demonſtrationis ſeveritas religioſè ſemper tenenda eſt, neque obſcura multarum propoſitionum ſarragine juvenum mens eſt obruenda, ſed ſplendidiori accuratioris Geometriæ lumine illuſtranda. Monendi ergò ſunt ſtudioſi adoleſcentes ut ab iis cautè abſtineant Elementis quæ nec ſatis accurata methodo conſcripta ſunt nec firmiſſimo demonſtrationum robore munita. Pernicioſiſſima quidem ſunt ſtudioſæ juventuti talia Elementa quæ eos habent auctores quorum doctrina tota in Elementis continetur. Verùm ſi recto proportionum ordine nexuque neceſſario colligatæ fuerint demonſtrationes omnes, ex hoc ſtudio diligentèr &, ut par eſt, inſtituto, in quolibet ſcientiarum genere

fructum maximum ſine ulla dubitatione polliceor. Nec quidquam exiſtimationis Geometrico ſtudio detrahi debet, ſi aliqui extiterint in rebus Geometricis etiam verſatiſſimi, in vulgari tamen agendi ratione & in rebus quoque familiariſſimis omninò inepti. Id quidem, quod ſumma injuria objici ſolet, tribuendum eſt præcipiti quorumdam Geometrarum judicio; non deſunt, fateor, celeberrimi etiam viri qui in rebus Mathematicis toti occupati, neceſſaria rerum tractandarum vel gerendarum principia & Elementa non ſatis tenent, atque hinc mirum non eſt quod aliquandò errent graviter, Geometrarum non Geometriæ vitio. Et requidem ipſa, ſi fons erroris probè attendatur, vitium in principiis, non verò in *conſequentiis* latere deprehenditur; contrà autem alii homines non pauci, veris utuntur principiis, errant autem in *conſequentiis*. Itaque hùc mihi maximè reducendum videtur Geometrici ſtudii pretium; ſi nem-

nempè duos fingere liceat homines eadem ingenii vi, eodemque cognitionum gradu præditos, atque *cæteris*, ut vulgò dicunt, *paribus*, unus autem ſit Geometriæ auxilio adjutus, alter autem deſtitutus, facilè mihi perſuadeo virum Geometram in quolibet ſcribendi genere, in tractanda etiam quæſtione theologica multò excellentiorem futurum; neque enim quæ prima ſunt, poſtrema dicet, & viciſſim; nec quæ perſpicua ſunt & illuſtria, minùs accurata methodo obſcurabit, aut quæ abſtruſa ſunt & involuta denſiori caligine non obvolvet. Verum ne Géometriæ ſtudio nimis tribuere videar & hanc quam maximè amo diſciplinam magnificentius prædicare, de iis non loquor melioris ingenii viris in quibus excellens judicium meditatione & experientia ſubactum atque perfectum miramur, ſivè graviora tractanda ſint negotia, ſivè ſtudiis quibuſcumque danda ſit opera. Has juſtiſſimas Geometriæ laudes attigiſſe ſatis ſit ad ex-

ci-

citandam adoleſcentum voluntatem. Faxit D. O. M. ut hoc meo qualicumque labore utantur, non in rebus phyſicis tantùm, ſed etiam ut in ſtudiis gravioribus, quem quidem fructum maximè exopto, ratiocinandi vim accuratiori methodo augeant atque urgeant, hujus tamen ſanctiſſimi dogmatis probè memores: *Captivare intellectum in obſequium fidei*.

Cæterum monendum ſupereſt Scolia & appendices in his Elementis prætermitti poſſe ab iis qui minori pollent intelligendi facilitate; minùs enim neceſſaria ſunt hæc addiiamenta.

IN-

INDEX

Caput I. *De præcipuis utriuſque Arithmeticæ operationibus generatim conſideratis.* P. I

Caput II. *De quatuor primis arithmeticæ operationibus in numeris integris.* 9

Probl. I. *Numeros integros addere, ſive in unam ſummam colligere.* 10

Probl. II. *Numeros integros ſubtrahere.* 11

Probl. III. *Numeros integros multiplicare.* 14

Probl. IV. *Numeros integros dividere.* 16

Caput III. *De quatuor præcedentibus operationibus in arithmetica ſpecioſa abſolvendis.* 27

Probl. I. *Quantitates litterales addere.* ibid.

Probl. II. *Quantitates litterales ſubtrahere.* 31

Probl. III. *Quantitates litterales multiplicare.* 33

Probl. IV. *Quantitates litterales dividere.* 37

Caput IV. *De iiſdem operationibus in numeris fractis.* 42

Caput V. *De radicum extractione.* 59

Caput VI. *De proportionibus.* 80

Appendix. *De Æquationibus.* 97

Proemium *De definitione & diviſione Geometriæ.* 113

Sectio I. *De Geometria linearum.* 121

Caput I. *De lineis rectis quoad mutuam poſitionem conſideratis, nullo tamen ſpatio*

ſeu

ſeu nulla figura terminatis. ibid.

Caput II. De linearum rectarum reſpectu circuli poſitione. 126

Caput III. De lineis rectis quæ ſpatium claudunt, ſeu de figurarum rectilinearum proprietatibus. 135

Caput IV. De linearum ratione ſeu de proportionibus. 145

Appendix. De proportionum uſu in triangulorum reſolutione, ſive de Trigonometria. 159

Sectio II. De Geometria ſuperficierum. 169

Caput I. De præcipuis planarum ſuperficierum proprietatibus. ibid.

Caput II. De ſuperficierum menſura. 174

Sectio III. *De Geometria ſolidorum.* 183

Caput I. *De Solidorum geneſi & proprietatibus.* ibid.

Caput II. *De Solidorum menſura.* 191

Appendix. *De lineis curvis.* 203

APPROBATIO.

REvereodiſſimi Patris Thomæ Auguſtini Ricchini Ordiois Prædicatorum Sacri Palatii Apoſtolici Magiſtri juſſu legi doctiſſimi eruditiſſimique Viri Reverendiſſimi Patris Jacqoier *Elementa Arithmeticæ*, *Algebræ*, *& Geometriæ &c.* Quantam iode voluptatis cœperim, difficile eſt exiſtimare. Nam cum nihil contineat, quod ab orthodoxæ Chriſtianæ Religionis decretis, atque inſtitutis diſcrepet, tum ita eſſe comperi, ordine, accuratè, dilucidè, elegaoter, tautoque oexu, ac tanta colligatione rerum perſcriptum, ut ad ejus Phyſicas ioſtitutiones illuſtrandas oihil ſupra deſiderari poſſe videatur. Quare illud aio, me vehemeoter cupere, ut quam fieri cito poteſt, in publicam emittatur lucem.

Dabam Romæ ex Monaſterio S. Mariæ Novæ die 4. *Menſe Decembri ann.* 1760.
D. ALOYSIUS STAMPA *Abbas Olivetanus Promovendorum ad Epiſcopatum Examinator, & in Collegio Urbano de Propaganda Fide Studiorum præfectus*.

IMPRIMATUR,

Si videbitur Rm̃o P. Mag. Sac. Pal. Ap.

D. Archiep. Nicomed. Viceſg.

IMPRIMATUR,

Fr. Th. A. Ricchinius Mag. Sac. Pal. Ap. Ord. Præd.

ELE-

XVI

ELEMENTA ARITHMETICÆ

TUM VULGARIS, TUM SPECIOSÆ

CAPUT I.

De præcipuis utriuſque Arithmeticæ operationibus generatim conſideratis.

I.

ARithmetica generatim definitur *ſcientia computandi*. Computatio autem vel fit per vulgares numeros ac proinde & determinatos, 1. 2. 3. &c., vel per alphabeti litteras a, b, c, &c. quæ numerum quemlibet, aut quantitatem quamlibet deſignant. Prima computandi ratio, *Arithmetica*, ſimpliciter dicitur; altera autem vocatur Arithmetica *ſpecioſa*, vel *algebra*; convenientius a Newtono Arithmetica *univerſalis* appellatur. Has quidem definitiones juxta vulgarem docendi conſuetudi-

nem præmittimus; monendum tamen eſt ſcientias quaſdam vix clarè definiri poſſe, niſi earumdem ſcientiarum diligens præcedat analyſis atque accurata explicatio. Ita in præſenti caſu, explicatis Arithmeticæ & algebræ operationibus, rectè jam dicere liceret: Hæc quam vobis explicavimus ſcientia, ea eſt quæ *arithmetica* vel *algebra* vocatur. Per *numerum* arithmetici intelligunt *unitatum multitudinem*. At accuratius a Nevvtono definitur numerus, *relatio* ſeu *ratio* quantitatis cujuſvis ad aliam ejuſdem generis quantitatem; quæ quidem definitio ut in bono lumine collocetur, obſervandum eſt quantitatem quamlibet cum alia ejuſdem generis quantitate comparatam, vel ea minorem eſſe, vel majorem, vel tandem ipſi æqualem; hoc eſt, magnitudinem aliquam vel in alia contineri, vel hanc aliam certo modo continere; hic autem modus quo magnitudo aliqua aliam continet vel in ea continetur, *numerus* dicitur. E. G. numerus 3. exprimit rationem magnitudinis alicujus ad aliam minorem quæ pro unitate aſſumitur, & in majori ter continetur. Contra autem ſi quantitas major 3, pro unitate adhibeatur, erit quantitas, 1, tertia pars quantitatis majoris quæ tanquam unitas conſideratur, ſive, 1, ter in quantitate majo-

majori continetur. Indè autem intelligitur quid ſit numerus *integer*, quid numerus *fractus*. Integer dicitur quem unitas metitur; fractus quæ eſt pars unitatis; ita 1. 2. 3. &c. ſunt numeri integri; ſed dimidia, tertia, quarta, &c. pars unitatis ſunt numeri fracti; ita autem exprimi ſolent numeri fracti $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{2}{3}$. $\frac{3}{4}$ &c. Ratio quam modo definivimus, ſi nempè conſideretur quomodo quantitas una alteram contineat dicitur *geometrica*. Vocatur autem *arithmetica*, ſi exceſſum tantummodo quantitatis unius ſupra aliam conſideremus. Duarum rationum æqualitas *proportio* dicitur vel *geometrica* vel *arithmetica* pro diverſa rationum qualitate. Quare ad habendam proportionem quatuor quantitates requiruntur, & prima ad ſecundam eſſe dicitur ut tertia ad quartam.

II. Numeri omnes in vulgari arithmetica decem notis ſive characteribus deſignantur; ſunt autem 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0 quorum ultimus *cyphra* ſive *zero* appellatur. Harum notarum varia eſt ſignificatio non ſolum ex diverſa illarum figura, ſed etiam ex diverſo quem occupant loco. Quæ ad ſiniſtram poſtremæ occurrunt deſignant unitates, quæ proximè præcedunt unitatum decadas; exindè centenarii ſequuntur, millenarii & ſic dein-

ceps per decadas & centenarios progrediendo. Huic autem uſui potiſſimum cyphra deſtinatur; cum nempè ipſa nullum deſignet numernm, auget tamen reliquarum notarum ſignificationem, longius illas ab extremo versùs ſiniſtram numero removens; ſic unitatis nota quæ ſola unicam deſignaret nnitatem, beneficio unius vel duplicis cyphræ in ſecundum aut tertium locum rejecta denas nnitates aut centenas ſignificabit. Breviores numeri facilè leguntur; ita 247, exprimunt ducentas qnadraginta ſeptem unitates; at in prolixioribus numeris aliquo opns eſt artificio; ita ſi legere oporteat longiorem numerum

. 3. . 2 . 1 .
324257856291402046 7212, hunc ita divides a poſtremis numeris exorſus; nempè tres poſtremos divides a præcedentibus puncto ſuperiùs appoſito, tribus ſequentibus adſcribes 1, & ſic deinceps reliquis ternariis punctum alternatim appones vel nnmerum, ita tamen ut numeri unitate ſemper augeantur, quemadmodum hìc factum vides. His peractis, quamlibet notarum claſſem perindè leges ac ſi ſola eſſet, & ubi punctum invenies dic mille; ubi, 1, dic decies centena millia, ſeu, ut vulgò loquimur *millionem*; nbi, 2, dic milliones millionum, ſive *billiones*; ubi 3, dic

dic *trilliones*, & ſic deinceps. Sic itaque legendus eſt numerus præcedens: ter mille ac ducenti quadraginta duo trilliones, quingenta ſeptuaginta octo millia ac quingenti ſexaginta duo billiones, nongenta quatuordecim millia ac viginti milliones, quadringenta ſexaginta ſeptem millia, bis centum ac duodecim.

III. Vulgares explicavimus arithmeticæ ch racteres quorum autores feruntur aſtronomi arabes; aliquid jam dicendum eſt de notis quæ *Romanæ* appellantur. Notæ illæ quarum in phyſicis inſtitutionibus uſus recurret, majuſculis alphabeti litteris exprimuntur. His characteribus *Romanorum* nomen factum fuiſſe creditur quod eos in monetis publiciſque monumentis uſurpaverint veteres Romani. Litteræ quæ numeros Romanos componunt, ſunt ſeptem ſequentes. I. V. X. L. C. D. M. harum notarum hæc eſt ſignificatio I. unitas. V. quinque. X. decem. L. quinquaginta. C. centum. D. quingenta. M. mille. Si duo I ſcribantur in hunc modum II. æquivalent binario; ſi tria ſcribantur, ſignificant ternarium. Numerus quaternarius ita exprimitur. IV, & numerus novenarius hoc modo IX, nempè unitas numeris V, X, præfixa eos mulctat unitate. Verùm ad exprimendos numeros vulgares 6. 7. 8. ſcri-

bi ſolet VI. VII. VIII. Si numero L, vel C, præmittatur X, numeri illi decade minuuntur; ita XL ſignificat 40, & XC 90. contra autem ſi numerum L ſequatur X, in hunc modnm LX, numerus præcedens augetur decade ſignificans 60 &c. Aliquando numerus 400. expreſſus fuit litteris CD, ſed rarò. Præter litteram, D, quæ exprimit 500, idem numerus ſignificatur etiam hoc modo IↃ. Ita etiam loco M, aliqnandò ſcribitur CIↃ. Eodem modo exprimi poteſt 600 per IↃC; & 700 per IↃCC &c. Si litteræ C & Ↄ, antè & poſt addantur, numerus CIↃ augetur in ratione decupla; ita CCIↃↃ ſignificant 10000, CCCIↃↃↃ, 100000 &c. Hi erant communes arithmeticæ characteres apud veteres Romanos, qui etiam numerum millenarium deſignare ſolebant, adſcripta numeris millenario minoribus lineola; hoc modo. $\overline{V}$ ſignificat 5000, $\overline{LX}$ deſignat 60000. Similiter $\overline{M}$ æquivalet 1000000. $\overline{MM}$ deſignat 2000000. a recentioribus nonnnllis Scriptoribus variationes aliquæ ſuernnt adhibitæ, ita litteris IIX. deſignant 8, litteris IICIX exprimunt 89. Qua ratione horum numerorum ope computationes ſuas iniverint veteres Romani nos omninò latet. Aliqnam pro-

procul dubio habuerunt arithmeticam, quam quidem invenire problema eſt a viris arithmeticæ & antiquitatis ſtudioſis ſolvendum, nec fortaſsè difficile.

IV. Quoniam numeri nihil aliud ſunt quam rationes quædam mente perceptæ & certis ſignis diſtinctæ, evidens eſt arithmeticam ſive ſcientiam numerorum eſſe artem diverſas illas rationes inter ſe combinandi illaſque certis characteribus diſtinguendi. Hinc naſcuntur arithmeticæ operationes præcipuæ. Etenim diverſæ numerorum combinationes huc revocari poſſunt ut nempè mutuus eorum exceſſus, vel modus quo ſe invicem continent expendatur & aſſignetur. Ex his autem intelliguntur mox explicandæ quatuor vulgares arithmeticæ operationes: *Additio*; *ſubtractio*: *multiplicatio*: *diviſio*.

V. Additio vocatur illa arithmeticæ operatio qua plures numeri ſimul colliguntur; ſubtractio autem dicitur operatio qua numeri a ſe invicem ſubtrahuntur. Ita ſi addantur 2 & 3 ut efficiantur 5; vel minor numerus 2 a majori 3 ſubtrahatur ut remaneat 1; in primo caſu dicitur additio, in altero autem ſubtractio. Patet in additione & ſubtractione conſiderari mutuum numerorum exceſſum; etenim in additione exceſſus ſummæ ab alterutro nu-

mero innoteſcit ; in ſubtractione autem mutna nnmerorum differentia inveſtigatnr . Mnltiplicatio appellatur illa arithmeticæ operatio qua idem numerus ſibimetipſi pluries additur ; ita ſi , 3 , per 4 , multiplicari debeat , idem eſt ac ſi , 4 , ſibi ipſi ter addatnr , vel 3 ſibi ipſi quater adjungatnr , prodibitque 12 . Diviſio eſt arithmeticæ operatio in qua numerns nnus ab alio ſubtrahitur , quantùm fieri poteſt ; ita nnmerns , 4 , ex 12 , ter ſubtrahi poteſt . Itaque patet in multiplicatione & diviſione conſiderari modum quo numeri ſeſe mutuò continent . Ita in præcedenti multiplicatione innoteſcit numerum 12 , ter continere nnmerum 4 ; per diviſionem autem demonſtratnr numerum , 4 , ter contineri in 12. Ex his evidens eſt mnltiplicationem nihil aliud eſſe quam additionem compoſitam ; atque etiam diviſio nihil aliud eſt quam compoſita ſubtractio . Quare ad duas duntaxat revocari poſſunt qnatuor vulgares arithmeticæ operationes. Hinc arithmeticæ operationes accuratè omninò definivit Nevvtonus : *compoſitionem* & *reſolutionem arithmeticam* , quæ quidem definitio ex ipſa arithmeticarnm operationum natura derivatnr . Quamvis autem numeri ſint rationes geometricæ , ex dictis tamen evidens eſt additionem & ſubtra-

tractionem propriè revocari ad rationem arithmeticam, multiplicationem verò & diviſionem ad rationem geometricam referri. Cæterum præter vulgares quatuor enumeratas operationes, aliæ ſunt plurimæ, ſed hæ omnes ad primas referuntur, ut ex dicendis manifeſtum fiet. Hic autem regulas arithmeticæ generatim conſideraſſe ſatis ſit; patet autem hanc quam tradidimus arithmeticæ notionem, arithmeticæ ſpecioſæ communem eſſe. Itaque licet arithmeticæ nomen generatim uſurpemus, illud tamen de arithmetica ſpecioſa intelligi quoque volumus. Jam verò univerſam arithmeticæ utriuſque doctrinam breviter & diſtinctè explicemus, quantùm poſtulant noſtrarum inſtitutionum neceſſitas, atque injuncta brevitas.

CAPUT II.

De quatuor primis arithmeticæ operationibus in numeris integris.

I.

Prima arithmeticæ operatio dicitur *additio* quæ ex præcedentibus ſatis intelligitur. Totam hujus operationis praxim declarabimus atque demonſtrabimus.

PRO-

PROBL. I.

Numeros integros addere, ſive in unam ſummam colligere.

ADdendi proponantur numeri in hoc exemplo expreſſi. Quatuor numerorum columnas ita alias aliis adſcribe ſerie deſcendente, ut unitates unitatibus ſubjiciantur, decades decadibus & ſic de reliquis. Tum infra omnes numeros ducta lineola & a poſtrema columna exorſus dic, 1 & 8 efficiunt 9, 9 & 2 efficiunt 11, 11 & 1 efficiunt 12. Habes ergò in hac columna unam decadem unitatum ac præterea duas unitates. Quarè ſcribe, 2, in columna unitatum, & decadem rejice in ſequentem decadum columnam dicens; 2 & 1 efficiunt 3, 3 & 6 efficiunt 9, 9 & 9 efficiunt 18, 18 & 6 efficiunt 24, hoc eſt, duas decadas decadum ſivè duo centenaria & 4 decadas, ſcribe ergò quatuor in loco decadum, & duo centenaria in ſequentem columnam rejice, eodemque pacto in hac & reliquis operare, & tandem invenies ſummam quæſitam 82042.

Exempl.
23561
392
8768
49321
82042.

Demonſtratio ex tota operationis ſerie faci-

facilè patet. Etenim in unaquaque columna numeri ita colliguntur tanquam ſi eſſent unitates, ex eaque ſumma tot unitates in columnam proximè ſequentem rejiciuntur quot decades collectæ ſunt; quod quidem faciendum eſſe evidens eſt, cum nota quælibet ab unitatum columna ad reliquas progrediendo, valorem habeat in columna ſequente, decuplo majorem quam in præcedente. Igitur in hac operatione adduntur ſingulæ unitates, decades, ſingula centenaria. Quarè patet hujus operationis ratio quæ quidem ut potè per ſe evidens, nullo vulgarium axiomatum auxilio indigere videtur.

PROBL. II.

Numeros integros ſubtrahere.

I I.

SEcunda arithmeticæ operatio dicitur *ſubtractio*, cujus totum hoc eſt artificium. Ut numerum datum a dato numero ſubtrahas; numerum ſubtrahendum alteri a quo ſubtrahi debet ita ſubjicies ut unitates unitatibus reſpondeant, decades decadibus & ſic de reliquis. Tum ab unitatibus exorſus quamlibet inferiorem no-

tam

tam a ſuperiori ſubtrahe & reſiduum ſcribe infra lineolam, habebis numerum qui ſit datorum numerorum differentia. Si verò uccurrat inferiorem notam ſuperiori majorem eſſe, hanc augebis decem unitatibus, eaſque mutuas accipies a proximè ſequenti nota quam proindè deinceps habebis tanquam unitate mulctatam. Subtrahendus proponatur numerus 4245 a numero 23897 Auferendu 5 ex 7 relinquitur numerus 2; auferendo 4 ex 9 relinquitur 5, 2 ex 8 remanet 6. At cum numerus 4 ex 3 ſubduci nequeat, adjice huic denas unitates & auferendo 4 ex 13, reſiduum habebis 9. Tum verò notam ſuperiorem proximè ſequentem unitate mulctabis; hanc enim ab ea mutuam accepiſti ut denis unitatibus præcedentem augeres; habebis ergò reſiduum 1, ideoque reſiduum totum 19652.

Exemp.
23897
4245
19652.

Demonſtratiu ſatis per ſe conſtat, cum unitates ab unitatibus auferantur, decades a decadibus &c. Nam quod in hoc exemplo numerus 3, decem augeatur unitatibus & numerus ſequens, 2, unitate mulctetur, ratio patet. Hæc nempè unitas in numero 3, decadi unitatum æqualis eſt, earum ſcilicet quibus conſtat idem numerus 3; quare etiamſi unitatem duntaxat ille amittat,

tat, huic tamen decem accedunt. Simili modo ſi plures ſequerentur cyphræ ex quibus proindè nulla fieri poteſt ſubtractio, ex numero proximè antecedenti mutua accipienda eſt unitas quæ in cyphram ſequentem tranſlata decem unitatibus æquivalet. Rurſus ex illa decade unitas in ſecundam cyphram transfertur atque ita deinceps. Quare patet cyphram ultimam decem unitatibus æqualem eſſe, cæteras verò antecedentes æquari novenario. Itaque evidens eſt hujus operationis ratio nec vulgarium axiomatum ope faciliùs intelligitur.

Ex additionis & ſubtractionis naturâ manifeſtum eſt duas illas operationes ſibi mutuam probationem conferre & ſeſe invicem confirmare. Etenim cum reſiduum in ſubtractione ſit ipſa numerorum differentia, patet minorem numerum reſiduo ſive differentiæ additum majori numero æqualem eſſe. Item cum additio ſit plurium numerorum aggregatum, ſi ex aggregato alteruter numerus auferatur, numerum alterum remanere neceſſum eſt. Si igitur explorare velis utrum additio ritè peracta ſit, ſubtractione utendum eſt; contra autem ad explorandam ſubtractionem additio adhibenda.

PRO-

PROBL. III.

Numeros integros multiplicare.

III.

TErtia arithmeticæ operatio vocatur *multiplicatio* in qua, ut patet ex capite præcedenti, toties ſumitur numerus multiplicandus quoties unitas continetur in numero per quem debet multiplicari. Singulæ notæ in ſingulas facilè ducuntur, ſi numeri breviores ſint. Sic nemo non videt 3 in 4 ductum, ſive 4 ter ſumptum 12 efficere. At ſi numeros pluribus notis conſtantes multiplicare oporteat, horum alterutrum infra alterum ſcribe ita ut unitates unitatibus ſubjiciantur. Deindè notas omnes ſuperioris numeri per ſingulas inferioris multiplica, initio a poſtremis facto. Decadas quæ inter multiplicandum colliguntur ſepone adjiciendas producto ex eadem numeri inferioris nota in proximè ſequentem ſuperioris. Facta quæ emergunt ex ſingulis notis inferioris, in omnes ſuperioris infra lineolam ſeorſim notentur, ita ut uniuſcujuſque unitates ſubjiciantur numero per quem multiplicatio peragitur. Si horum omnium ſumma colligatur, ea erit productum quæſitum. Mul-

Multiplicandus proponatur numerus 235 per 43. Scribe 43 ſub 235; tum ducta lineola dic. 3 in 5 efficiunt 15, ſcribe 5 ſub numero multiplicante, 3, & unam decadem ſepone adjiciendam facto ſequenti ex 3 in 3 quod eſt 9, cui ſi addas 1, habebis unam decadem, & nullas præterea unitates; ſcribe igitur 0, & facto ex 3 in 2 adjiciens 1, ſcribe 7. rurſùs dic 4 in 5 efficiunt 20, ſcribe, 0, ita ut multiplicatori, 4, ſubjaceat, & facto ſequenti 4 in 3 quod eſt 12, adjiciens, 2, habebis 14; ſcribe igitur 4, & ſeponens 1 dic, 2 in 4 efficiunt 8 & adjecto 1 ſcribe 9. Demùm ducta linea, collige in unam ſummam hos numeros ita diſpoſitos, eritque 10105 productum quæſitum.

Exemp.

235
43
705
940
10105.

Demonſtratio evidens eſt ex ipſa notarum arithmeticarum natura; ſi nempè in memoriam revocetur numerorum characteres decuplo plus valere in locis anterioribus quam in poſterioribus, illicò enim manifeſtum fiet toties ſumi in producto numerum multiplicandum quoties unitas continetur in numero per quem fit multiplicatio.

PRO-

PROBL. IV.

Numeros integros dividere.

IV.

QUarta arithmeticæ operatio vocatur, *Diviſio*. Cum numerus datus per alium datum dividendus proponitur, eò reducitur quæſtio ut inveniatur quoties in numero dividendo contineatur diviſor totieſque auferatur, atque totidem unitates ſcribantur in numero qui idcirco *quotus* dicitur. Hæc ergo genuina eſt diviſionis notio, nempè dividendus eſt ad diviſorem ut quotus eſt ad unitatem; vel dividendus eſt ad quotum ut diviſor eſt ad unitatem.

Proponatur dividendus numerus 10105 per 43. Numero dividendo diviſorem præfige lineola interjecta, tum operationem inſtituens in primis notis dividendi quæ exhibeant quantitatem diviſori æqualem vel proximè majorem, dic quoties 43 continentur in 101, quotus erit

Exempl.

```
43 | 10105 | 235
       86
      ---
      150
      129
      ---
      215
      215
      ---
      000
```

erit 2. Scribe ergò, 2, lineola pariter interjecta ex altera parte dividendi, & factum ex, 2, in 43 ſive 86 aufer ex 101 & reſiduo 15 notam appone quæ in dividendo proximè ſequitur quantitatem jam diviſam 101. Dic iterum, quoties 43 continentur in 150, quotus eſt 3 quem ſcribe ut ante, & factum ex 3 in 43 ſeù 129 aufer ex 150. Reſiduo 21 adnecte ſequentem notam dividendi 5, & dic iterum, quoties 43 continentur in 215, quotus erit, 5, quem ſcribe cum aliis quoti notis & anfer ex 215 factum ex 5 in 43, ſivè 215. Cum nihil ex ea diviſione ſuperſit, patet numerum 235 illum accuratè eſſe qui oritur ex diviſione 10105 per 43.

Tota operationis ratio facilè patet, ſi animadvertamus in hujuſmodi operatione rem perindè ſe habere ac ſi quæreretur quota pars quantitatis alicujus ſingulis hominibus obveniret, ſi eam ex æquo tot hominibus diſtribui oporteret quot unitates continet diviſor. Nam in tota operationis ſerie inquirimus quot unitates, decades &c. ſingulis dari poſſint, iiſque datis quæ dari poſſunt, quot adhuc diſtribuendæ ſuperſint. Facilè autem intelligitur poſt quamlibet ſubtractionem peractam id quod relinquitur, antequam ulteriorem dividendi notam adjicias, diviſore minorem

eſſe oportere; nam ſi reſiduum æquale foret vel majus, diviſor in quantitate jam diviſa pluries contineretur quam indicet numerus in quotum relatus. Omnis difficultas in eo ſita eſt, quod in numeris longioribus ſtatim non pateat quoties diviſor in dividendi notis contineatur; tentamine utendum eſt; diviſor nempè per numeros ab, 1, ad 9 multiplicandus eſt, atque numeri ex hac multiplicatione producti debent comparari cum dividendi notis, & explorandum eſt quinam ex illis numeris ſit proximè minor; pones in quoto numerum in quem ductus diviſor hunc efficit numerum, ipſum verò numerum ex dividendi notis ſubduces. Cæterum qui in arithmetica ſatis fuerit exercitatus, facilè conjiciet ex primis utriuſque numeri notis, dividendi ſcilicet & diviſoris, ipſum numerum pro quoto eligendum.

Probè autem obſervari debet in quoto notarum valor, ut in aliis arithmeticæ operationibus jam antea monuimus; at in præſenti operatione quæ eſt omnium difficillima rem brevi exemplo illuſtrabimus. Dividendus proponatur numerus 416 per 2, ſtatim patet in quoto contineri centenarios, decadas & unitates. Dividatur jam 4 per 2, quotus erit, 2, qui per 2 multiplicatus producit 4, quo ſubtracto ex 4 ſit

ſit o. Patet ergò diviſum fuiſſe 400 per 2. Progredior deindè ad notam ſequentem 1, hoc eſt dividi debet 10 per 2. Statim autem video 2 in 10 decies non contineri; quare ſcribitur, o, in quoto, tum ut indicetur quotum nullam decadem continere, tum ut primæ quoti notæ, 2, ſuus ſervetur centenarii valor. Tandem progrediendum ad, 6, qui numero præcedenti, 1, apponitur, diviſoque 16 per 2, habetur quotus 8, ideòque quotus totus eſt 208. Hinc generatim intelligitur qua de cauſa in quoto ſcribatur cyphra, imò & plures cyphras aliquando ſcribi oporteat. Hac diviſione peracta, nulla reliquitur in dividendo nota; ſi autem aliquid reſidui ex poſtrema ſubtractione ſuperſit, quoto adjicienda eſt fractio. Ita ſi in exemplo præcedenti haberetur numerus 417 per 2 dividendus, ita ut numeri 417 ex æquo hominibus, 2, partiri debeas, ſinguli acciperent nummos 208 & dimidiam partem nummi quæ ita ſcribitur $\frac{1}{2}$.

Ex hactenus explicatis generatim etiam patet ſatis eſſe primam dividendi notam per primam diviſoris notam dividi, ſi in diviſore & dividendo idem ſit notarum numerus. Verum ſi dividendus plures contineat notas, perſæpe neceſſe eſt duas primas dividendi notas primæ diviſoris no-

tæ ſubjici, idque fieri debere evidens eſt quoties datus notarum numerus in diviſore minorem habet valorem quam habeat æqualis notarum numerus in dividendo; verum ſi duæ adhibeantur dividendi notæ; per primam diviſoris notam diviſio ſemper fieri poteſt. Quare generatim oſtenditur, ſumptis in dividendo tot notis quot ſunt in diviſore, vel etiam, quod aliquando neceſſe eſt, nota una inſuper adjecta, notarum numerum in quoto, unitate excedere reſiduum notarum numerum in dividendo. Inde autem facilè colligitur nullum in quoto numerum novenario majorem eſſe poſſe; Etenim diviſor decies æqualis eſſe non poteſt aſſumptæ dividendi parti. Nam ſi diviſor decies ſumatur, nota una augetur; at pars dividendi aſſumpta habet notarum numerum, notarum diviſoris numero æqualem vel unitate majorem. In primo caſu evidens eſt dividendi partem aſſumptam minorem eſſe diviſore decies ſumpto, cum notarum numerum habeat unitate minorem. In ſecundo caſu, pars dividendi aſſumpta, ſi nota una versùs dextram minuatur, minor ſit diviſore. Quare dividendus ſimul cum hac nota reſtituta, minor eſt diviſore decies ſumpto.

Diviſionis ritè peractæ argumentum habebis, ſi diviſorem in quotum ducas, rede-

deatque diviſus numerus; nam ſi non redeat, manifeſtum eſt alicubi errorem eſſe admiſſum; quod quidem patet ex ipſa diviſionis natura; cum dividendus toties contineat diviſorem, quoties unitas continetur in quoto; quare cum quotus exprimat quoties diviſor contineatur in dividendo, ſi diviſor per quotum multiplicetur, dividendum ipſum reſtitui neceſſe eſt. Cæterum patet, ſi diviſorem accuratum habere non licuit, facto ex diviſore in quotum addendum eſſe reſiduum ex ultima diviſionis ſubtractione, ut redeat diviſa quantitas. Contraria ratione evidens eſt multiplicationis ritè peractæ haberi argumentum, ſi productum dividatur per multiplicandum aut per numerum multiplicatorem; in primo caſu quotus ſit multiplicator; in caſu autem altero, quotus eſt multiplicandus. Cum enim diviſio ſit multiplicationi contraria, per diviſionem reſolvitur quod in multiplicatione componitur & contra. Cæterum in multiplicatione & diviſione compendia plurima uſus docebit; hic monere ſatis erit multiplicationis per plures cyphras faciendæ compendium haberi, ſi in producto ſcribantur tot cyphræ quot occurrunt in multiplicando & multiplicatore ſimul; multiplicatio autem aliarum notarum fiat ſecundum regulas

gulas prædictas. Item in diviſione, ſi diviſor & dividendus cyphras contineant, in dividendo delendæ ſunt tot cyphræ quot occurrunt in diviſore quæ etiam in ipſo diviſore deberi debent & reliqua operatio peragenda, ut ante. Notandum autem eſt compendium illud valere duntaxat, ſi cyphræ fuerint ultimæ tum diviſoris, tum dividendi notæ; quod quidem manifeſtum eſt ex cyphrarum natura.

Scolium. In præſenti capite ſermonem habuimus duntaxat de numeris homogeneis, ſive ejuſdem ſpeciei, at pari facilitate in numeris heterogeneis, ſeu diverſæ ſpeciei abſolvuntur operationes arithmeticæ. Antequam verò operationes illas explicemus, definiendum eſt quid per numerum *concretum*, quid per *abſtractum* intelligant arithmetici. Numerus concretus dicitur quo res aliqua determinata deſignatur, ita ſi dicas tres homines, tres horas, tres pedes &c. At ſi numerum, 3, generatim enuntiaveris, nec rem aliquam deſignaveris, numerus vocatur abſtractus. Jam in numeris diverſæ ſpeciei additio & ſubtractio facilè intelliguntur. Probè tenenda eſt diverſa numerorum ſpecies; ita ſi addi debeant lineæ, pollices, pedes, exapedæ, ſciendum eſt lineas 12, pollicem unum æquare; pollices 12, pedem

nnu'n

unum & exapedam ex pedibus 6 conſtare. Ubi autem in linearum additione ſumma efficitur quæ 12 excedit, tot unitates inter pollices referri debent quot ſunt numeri duodenarii, quod verò reliquum eſt ſeu quod duodenario minus eſt in linearum columna ſcribi debet, & ita deinceps de alia qualibet numerorum ſpecie Similiter in ſubtractione tota patet operationis ratio; ſi quantitas ſubtrahenda, E. G linearum numerus juſto major ſit, jam ex quantitate præcedenti, pollicum ſcilicet, mutuo accipienda eſt unitas quæ duodenario numero æquivalet, atque ita reliqua operatio peragenda. Illud unicum eſt diſcrimen inter operationes arithmeticas in numeris abſtractis atque heterogeneis peragendas, quod ſcilicet in numerorum abſtractorum additione vel ſubtractione, unitas mutuò accepta decadi æquivaleat; at in numeris heterogeneis unitas quæ mutuò accipitur eum retinet valorem qui ſpeciei ſuæ reſpondeat. Hæc de additione & ſubtractione.

Quod multiplicationem ſpectat, impropriè omninò a quibuſdam arithmeticis proponi videntur concretorum numerorum multiplicationes. Ita ineptum eſt, quod faciunt aliqui, quærere productum ex nummis 3, juliis 3, aſſibus 3, in nummos 3, julios 3, aſſes 3. Etenim in eo ſita eſt mul-

multiplicatio ut data quædam quantitas datis vicibus ſumatur, ac proinde multiplicator debet eſſe numerus abſtractus. Qua ratione autem quantitates diverſæ ſpeciei per numerum abſtractum multiplicentur facilè patet; Si, E. G. productum ex lineis in numerum abſtractum majus ſit numero duodenario, jam inter pollices rejici debent tot unitates quot ſunt numeri duodenarii, quod autem reliquum eſt inter lineas ſcribendum. Porrò quamvis in multiplicatione numerus abſtractus eſſe debeat multiplicator, res tamen aliter ſe habet in diviſione; nam dividendus ſemper cenſetur numerus concretus, diviſor autem vel concretus vel abſtractus eſſe poteſt. Ita dividi poſſunt nummi, 6, per nummos, 2, hoc eſt, inveſtigari poteſt quoties, 2, contineatur in, 6, quotus 3 erit numerus abſtractus. Poteſt etiam dividi numerus concretus per numerum abſtractum, ita nummos, 6, dividere poſſumus per 3, hoc eſt, inveſtigare poſſumus tertiam partem nummorum, 6, quotus erit numerus concretus, nempè nummi 2. Jam ut perſpicua habeatur diviſionis notio, ad ipſam definitionem redeamus. In diviſione ſcilicet dividendus eſt ad diviſorem ut quotus eſt ad unitatem, vel dividendus eſt ad quotum ut diviſor ad unitatem. Probè
au

autem obſervari debent illæ duæ proportiones, licet una eademque videantur. Dividendus tanquam numerus concretus ſemper habetur, concretus autem vel abſtractus eſſe poteſt numerus diviſor. In 1° caſu, quotus erit numerus abſtractus, & locum babet prima proportio; in caſu altero, ubi nempè diviſor eſt numerus abſtractus, quotus eſt numerus concretus & locum babet proportio altera; quæ quidem omnia exemplo facilè licebit intelligere. Si nummi, 6, *numerus concretus* dividantur per nummos, 2, *numerum*, itidem, *concretum*, quotus erit numerus abſtractus 3; hic enim non indicabit numerum nummorum, ſed exprimet quoties diviſor continetur in dividendo; erunt nempè, 6, nummi ad 2 nummos ut numerus abſtractus, 2, eſt ad unitatem abſtractam 1. Dici autem non poſſet, 6 nummi (*numerus* ſcilicet *dividendus & concretus*) ſunt ad quotum 3 (numerum abſtractum), ut nummi 2, (*numerus diviſor & concretus*) ad 1 (numerum abſtractum). Talis proportio nullam in mente relinqueret diſtinctum notionem; cum enim numerus concretus & numerus abſtractus diverſi ſint generis, nulla inter eos comparatio & ratio propriè dicta inſtitui poteſt.

Si diviſor ſit numerus abſtractus, ut in

caſu ſecundo, quotus eſt numerus concretus, & ſecunda valet proportio. Ita ſi dividantur 6 nummi per numerum abſtractum 3, quotus erit nummi 2, (numerus ſcilicet concretus), habebiturque hæc proportio: numerus concretus nempe 6 nummi erit ad quotum nummos 2, ut diviſor 3 ad 1. Id verò nntandum eſt in utraque proportiune nnitatem eſſe ſemper nmmerum abſtractum. Quare diviſio ſub duplici ratione conſiderari poteſt; vel enim quæritur quoties quantitas una in altera ejuſdem generis quantitate continetnr, & hic eſt primus caſus, vel quæritur quantitas quæ certis vicibus in alia ejuſdem generis quantitate contineatur, & hic eſt caſus ſecundus. Facilè antem patet ex demonſtratis quomodo numeri concreti per abſtractos dividantur, aut etiam cuncreti per concretos etiamſi fuerint diverſæ ſpeciei. Etenim ſi concreti per abſtractos dividantur, initiu ſumpto ab iis qui majurem habent valorem, diviſiu ex regulis præſcriptis inſtituatur; ſi autem ſuperſit aliquid, ad minorem ſpeciem reducatur. E. G. Si reſidui fuerint pedes, reducantur in pullices atque iterum diviſio de mure fiat. Si concretus numeros diverſæ ſpeciei per cuncretos itidem diverſæ ſpeciei dividi uporteat, jam numeri tùm dividendi tùm di-

viſo-

viſoris ad minimam ſpeciem deprimantur quod per multiplicationem fieri manifeſtum eſt, atque diviſio fiat eodem modo ac in numeris abſtractis. Cæterum in multiplicatione & diviſione quantitatum diverſæ ſpeciei, varia adhiberi poſſunt operandi compendia quæ ſine fractionum doctrina intelligi non poſſunt. Diviſionis notionem ex genuinis principiis jam hauſimus; in operationibus arithmeticis abſtrahi ſolet a concretis abſtractiſque numeris, an concreti ſint vel abſtracti, ad majorem operationum facilitatem; verùm ad formandam earumdem operationum ideam diſtinctam, neceſſe eſt ut numeris ſua deinde reſtituatur conveniens notio.

CAPUT III.

De quatuor præcedentibus operationibus in arithmetica ſpecioſa abſolvendis.

PROBL. I.

Quantitates litterales addere.

I.

Quantitatibus litteralibus præfiguntur ſigna quorum ſignificationem præmitti omninò neceſſum eſt. Signum addi-

tionis eſt $+$, ſignum autem ſubtractionis eſt $-$, æqualitas duabus lineolis exprimi ſolet hoc modo $=$. Ita $a = a$, $a - a = 0$. Quantitas addenda dici ſolet quantitas *poſitiva*; quantitas autem ſubtrahenda vocatur *negativa*. Si quantitati litterali præfigatur numerus aliquis, hic *coefficiens* vocatur; ita in quantitate litterali $2a$, numerus, 2, coefficiens appellatur. Si autem quantitas litteralis nullum numerum præfixum habeat, jam unitas tanquam illius coefficiens cenſeri debet; ita $a = 1a$, ut patet. Quantitates litterales dicuntur *ſimiles*, ſi eaſdem contineant litteras & eundem earumdem litterarum numerum; etiamſi diverſis coefficientibus notentur; ita $+ 2a$ & $- 5a$ ſunt quantitates ſimiles; at *diſſimiles* ſunt quantitates, a, & b, atque etiam quantitates, a, & aa. Quantitas aliqua *ex pluribus terminis compoſita* dicitur quæ plures habet litteras ſigno $+$ vel $-$ connexas. Ita $a + b$ conſtat ex duobus terminis & *binomium* dicitur; $a + b + c$ ex tribus terminis componitur & *trinomium* vocatur. Quantitas ex unico termino compoſita dicitur *quantitas ſimplex* atque etiam *monomium*; ita, a, ab, abc, ſunt quantitates ſimplices. His præmiſſis definitionibus, quantitatum litteralium additio jam explicanda eſt. Si quantitates ſim-

ſimplices fuerint, tota operationis ratio ſtatim patet. Ita ſi a & a addi debeant, habebitur 2a; ſi addere oporteat a & 2a, ſumma erit 3a & ita deinceps; ſatis nempè eſt in hoc caſu addi coefficientes & coefficientium ſummam quantitatibus litteralibus præfigi, eodem ſervato ſigno + vel —, ſi quantitates eodem ſigno afficiantur. At ſi diverſa fuerint ſigna, jam coefficiens minor a majori ſubtrahi debet & differentia cum majoris coefficientis ſigno ſcribenda.

Id quidem evidens eſt ex negativarum & poſitivarum quantitatum natura. Etenim quantitates poſitivæ quantitatibus negativis ſunt directè contrariæ. Quare ſi quantitates addendæ ſimiles ſint ſignîſque contrariis affectæ, vel ſeſe omninò deſtruunt, vel aliqua ex parte tantùm; nempè ſi quantitas una ſit altera major, deſtruitur in majori quantitate pars minori æqualis, & reſiduum eſt quantitatis utriuſque differentia, quæ quidem differentia ſigno majori quantitati præfixo affici debet. Ita evidens eſt quantitates 5df, & — 3df reduci ad + 2df; nam 5df eſt quantitas df, quinquies ſumpta, & — 3df eſt quantitas df, ter ſubtracta; ſed eadem quantitas quinquies ſumpta & ter ſubtracta reducitur ad quantitatem bis ſumptam.

Similiter + 5ſm & — 6ſm reducitur ad — 1ſm, vel ad — ſm. Nam — 6ſm eſt quantitas ſm, ſexies ſubtracta, & + 5ſm eſt eadem quantitas quinquies addita, ac proindè quantitas, ſm, ſemel ſubtrahitur & remanet negativa, ſeu fit — ſm. Eadem ratione operandum eſt in aliis quantitatibus utcumque compoſitis. Quantitates addendæ ita diſponnntur, ut ſimiles termini ſibi invicem reſpondeant.

Exemplum.

$$\begin{array}{r} 3ab - 5cs - 4dr + 2s \\ -ab + 4cs + 4dr - s \\ \hline 2ab - cs \;\; * \;\; + s \end{array}$$

Singulæ partes ſeorſim conſiderantur ut ſimplices, & additio fit, ut modo præſcriptum eſt; ſumma autem infra lineolam ſcribitur. Sub terminis qui ſeſe mutuò deſtrunnt ſcribi ſolet ſtellula vel zero. Tota operatio patet ex præſenti exemplo. Si quantitates aliquæ fuerint diſſimiles, eas ſigno + vel — connectendas eſſe evidens eſt. Ita ſi addi oporteat a & b, vel a & — b, ſcribendum eſt a + b, a — b.

PRO-

PROBL. II.

Quantitates litterales ſubtrahere.

I I.

IN ſubtractione conſiderentur quantitates ſingulæ ſubtrahendæ tanquam ſi haberent ſignum ei quod habent contrarium & fiat ſumma, ex legibus jam præſcriptis; nempè in quantitate ſubtrahenda mutetur ſignum $+$ in $-$ & $-$ in $+$, & additio de more fiat. Ita ſubtrahitnr b ex a, ſcribendo $a - b$. Si $b - c$ ex $a + c$ ſubtrahi oporteat, ſcribitur $a + c - b + c = a - b + 2c$. Similï modo in quantitatibus utcumque compoſitis operandum eſt. Quantitas ſubtrahenda inferiori loco ſcribitur, alia autem ex qua ſubtractio fieri debet, ſupra apponitur; deindè mutatis ſignis, ut jam dictum eſt, tota quantitatum ſeries ſcribitur, & poſteà reducitnr, ut factum eſt in additione; babebitur quantitatum differentia, infra lineolam ſcribenda. Quod autem in quantitate ſub-

Exempl.

$$\begin{array}{l} ab + abb - dd \\ ab - bc + dd \\ \hline ab + abb - dd - ab + bc - dd \\ = abb + bc - 2dd. \end{array}$$

trabenda ſignum — mutetur in + ratio facilè patet. Si ex, a, ſubtrahi debeat b — d, ſcribaturque primò a — b, ſubtractio juſto major eſt; ſubtrahenda enim non proponitur tota quantitas, b, ſed, b, mulctata quantitate, d; quare juſto major eſt ſubtractio & exceſſus eſt ipſa quantitas, d, quæ proindè cum ſigno poſitivo + reſtitui debet, & ſcribendum eſt a — b + d. Id verò numerorum exemplo illuſtratur. Si ex numero 6 ſubtrahendus proponatur numerus 5—3, ex præſcripta regula ſcribendum eſt 6 — 5 + 3, hoc eſt, 4 reductione facta; quod evidens eſt, ſi enim ſcriberes 6—5—3; ſubtraheres 8 ex 3, quod quidem faciendum non proponitur; cum enim ſit 5—3 = 2, ex numero 6 ſubtrahi debet duntaxat numerus 2. Cæterum patet in calculo litterali non ſecus ac in arithmetico, additionem & ſubtractionem ſibi mutuam probationem præbere, ita ut operatio una per alteram mutuò exploretur.

PRO-

PROBL. III.

Quantitates litterales multiplicare.

III.

Signum multiplicationis eſt $\times$, quod tamen in multiplicatione factis per litteras omitti ſolet, & ſola conjunctio litterarum ſine ſigno multiplicationem ſignificat. Sit $a = 2$, $b = 10$, erit $ab = 2 \times 10 = 20$, Si eadem quantitas per ſeipſam multiplicetur, apponitur poſt ipſam paulò ſupra numerus qui exprimat quoties ſcribenda eſſet. Ita $aa = a^2$, $aaa = a^3$. Cavendum ne confundatur a^2 cum, $2a$, ſi $a = 5$ erit $a^2 = 25$, $2a = 10$, ſi $b = 2$, erit $(a + b)^2 = \overline{a + b}^2 = 7 \times 7 = 49$; parentheſis autem ( ) vel lineola producta — deſignat totam quantitatem $a + b$, in ſeipſam multiplicari. Numerus ſupra poſitus eſt *index*, ſeù *exponens potentiæ*, ut vocant, vel *poteſtatis* ſeu *dignitatis* quantitatis ipſius, & exprimit quot vicibus unitas per illam quantitatem multiplicetur, Ita $1 \times a = a^1$, $1 \times a \times a = a^2$, $1 \times a \times a \times a = a^3$ &c.

In quantitatum compoſitarum multiplicatione ſcribenda eſt altera quantitas ſub alte-

altera, tum tota prima quantitas multiplicanda per unum è terminis ſecundæ, ſcribendo productum iu una linea, deindè tota prima quantitas per aliam & ita porrò, ſcribendo ſingula producta in ſingulis lineis ac notando ſimiles terminos diverſorum hujuſmodi productorum alios ſub aliis, deindè omnium linearum colligenda ſumma. Omnium verò hujuſmodi operationum patet ratio; multiplicatio enim fit per partes non ſecus ac in quantitatibus ſimplicibus. Porrò in multiplicatione quatuor operationis partes conſiderari debent, nempè ſigna, coefficientes, litteræ & exponentes; hinc quatuor præſcribuntur regulæ. 1°. Si ſigna fuerint eadem, poſitiva ſcilicet vel negativa, productum ſit poſitivum. Contra autem ſi fuerint diverſa, productum eſt negativum. Ita $+ \times + = \times$, $+ \times - = -$, $- \times + = -$ & $- \times - = +$. 2°. Coefficientes in ſe invicem multiplicantur. 3°. Litteræ ordine alphabetico ſcribuntur, uullo interpoſito ſigno. 4° Si quantitas aliqua exponente afficiatur eaque multiplicari debeat per eandem litteram expoueute itidem affectam, littera illa ſemel in producto ſcribenda eſt, ita ut tamen hujus quantitatis exponens æqualis ſit exponentium ſummæ. Operatio tota patet exemplo.

plo. Quantitas multiplicanda ſuperiori loco ſcribitur. Deinde multiplicatur per, a,

Exempl.

$$\begin{array}{l} a^2 + 2ac - bc \\ a - b \\ \hline a^3 + 2a^2c - abc \\ - a^2b - 2abc + b^2c \\ \hline a^3 - a^2b + 2a^2c - 3abc + b^2c \end{array}$$

& producta ſingula infra lineolam ſcribuntur. Poſteà fit multiplicatio per — b, productaque infra apponuntur, & tandem productorum partes ſingulæ, ut moris eſt, in ſummam colliguntur. Id verò, pro majori additionis facilitate, obſervandum eſt ut ſcilicet ſimiles productorum partes aliæ ſub aliis ſcribantur & ſibi invicem reſpondeant, ut in additione præſcripſimus; quod ſpectat tres ultimas leges, hæ ſatis patent ex antea demonſtratis; verùm quod attinet ſignorum doctrinam in bono lumine collocari debet.

Signorum multiplicatio quæ tyronibus difficultatem afferre ſolet, ex ipſa quantitatum negativarum natura intelligi poteſt. Dum quantitas poſitiva + a multiplicatur per aliquem numerum poſitivum + n, ſenſus eſt quantitatem + a, toties ſumi quoties unitas continetur in, n, ac proindè productum fit na..... Si — a multiplicari debeat per, n, ſenſus eſt — a quantitatem negativam toties ſumi, quoties unitas

tas continetur in, n, ideòque productum eſt — na. Simili modo ſi multiplicetur + a per — n, ſenſus eſt quantitatem, a, toties ſubtrahi quoties unitas continetur in, n, ideòque productum eſt negativum ſeu — na. Si — a multiplicare oporteat per — n, ſenſus eſt — a, toties ſubtrahendum eſſe quoties unitas eſt in, n; ſed ſubtractio quantitatis negativæ — a, æquivalet additioni + a; quare productum eſt + na. Nemo non videt productum ex quantitate poſitiva in poſitivam fieri poſitivum, ſed alii caſus hoc modo rursùs illuſtrari poſſunt. Cum ſit + a — a = o, ſi multiplicetur + a — a per n, productum debet eſſe, o. Jam verò primus producti terminus eſt, na, ergò terminus alter debet eſſe — na, qui deſtruat primum terminum + na, ita ut productum ſit + na — na = o. Quare — a × + n = — na. Simili modo, ſi multiplicetur + a — a per — n, primus producti terminus eſt — na. Quare terminus alter eſt + na; alioqui termini duo ſeſe mutuò non deſtruerent; quod tamen fieri debet cum ſit a — a = o. Ergò — a × — n = + na.

PRO-

PROBL. IV.

Quantitates litterales dividere.

IV.

Signum diviſionis eſt lineola interpoſita dividendum ſeparans a diviſore, ita $\frac{a}{b}$, deſignat, a, dividi per, b; diviſio etiam deſignatur interpoſitis binis punctis hoc modo, a : b. Verum bis ſignis utendum eſt duntaxat, ſi diviſio accuratè fieri non poſſit; quod primùm illuſtrabimus exemplo quantitatum quæ unico conſtant termino. Si proponatur dividenda quantitas a^2bc per a^2c, erit $\frac{a^2bc}{a^2c} = b$, ac proindè quotus erit b. Simili ratione $\frac{6a^2bc}{2a^2c} = 3b$. At $\frac{10a^2b}{6a^2c} = \frac{10b}{6c}$. In hoc ſita eſt tota diviſionis operatio ut ex dividendo & diviſore expungantur litteræ utrique communes, reliquæ autem pro quoto habeantur. Si autem quantitates litterales coefficientibus afficiantur, evidens eſt diviſionem inſtitui debere non ſecus ac in arithmetica vulgari. Porrò licet in dividendo & diviſore deleantur litteræ communes,

munes, non tamen putandum eſt quotum ex quantitate per ſeipſam diviſa eſſe $= 0$, ita $\frac{abc}{abc}$ non eſt $= 0$, delentur quidem litteræ omnes, ſed quantitati litterali præfixus ſemper intelligitur coefficiens 1; ſic $\frac{abc}{abc} = \frac{1abc}{1abc} = \frac{1}{1} = 1$. Et quidem dum dividitur abc per abc, quæritur quoties abc continetur in abc. Sed quantitas quælibet ſemel in ſeipſa continetur. Quarè in hoc caſu, quotus eſt ſemper unitas. Quod ſignorum leges ſpectat, eædem omninò ſunt quæ pro multiplicatione, nempe ſi $+$ dividatur per $+$ & $-$ per $-$ quotus ſigno $+$ afficitur; contra autem ſi dividatur $+$ per $-$, vel $-$ per $+$, quotus afficitur ſigno $-$. Tota explicatæ operationis ratio evidens eſt ex ipſa diviſionis natura; cum enim productum ex diviſore in quotum dividendo æquale eſſe debeat, manifeſtum eſt quotum ex diviſione quantitatis negativæ per negativam, oportere eſſe poſitivum. Ponamus enim eſſe negativum; jam productum ex quoto negativo in diviſorem negativum foret poſitivum, ac proindè non rediret quantitas dividenda quæ ponitur negativa. Simili ratione demonſtrantur aliæ ſignorum leges.

Eo-

Eodem planè modo operandum eſt in aliis diviſionibus ut cumque compoſitis. Ita ſi dividi oporteat $9ab^2 - 15a^2b + 6a^3$ per $- 3ab + 2a^2$. Singuli termini ita diſponi

Exempl.

$6a^3 - 15a^2b + 9ab^2$	$2a^2 - 3ab$
$- 6a^3 + 9a^2b$	$3a - 3b$
$* - 6a^2b + 9ab^2$	
$+ 6a^2b - 9ab^2$	
$* \quad *$	

debent ut ſumatur diviſionis initium ab illo termino qui ad maximam evectus eſt poteſtatem, & ita per gradus progrediendo, ut hic factum vides. Itaque dividas $6a^3$ per $2a^2$, prodit quotus $3a$ per quem diviſor totus multiplicatur, productumque $6a^3 + 9a^2b$ ſubtrahas ex dividendo, reſiduum fit $- 6a^2b$ cui addas $9a^2b$, & dividere pergas ut ante, quotus eſt $- 3b$ productumque ex hoc quoto & diviſore iterum auferas ex dividendo, nihilque remanet. Quare accurata eſt diviſio; ſi autem peracta operatione aliquid ſuperſit ita ut diviſor & reliqua pars dividendi nullas communes habeant quantitates, jam diviſio accuratè fieri non poteſt, ſed quoto invento jungenda eſt fractio: de fractionibus autem tractabitur in proximo capite.

Sæpe contingit diviſionem in infinitum continuari, & tunc quotus fit, ut vocant, *ſeries*

ſeries infinita. Exemplo ſit unitas dividenda per $1 - a$. Operatio eſt hujuſmodi.

$$\frac{1}{1-a}\left\{\begin{array}{l}\text{quotus eſt}\\ 1 + a + aa + a^3 + a^4 \text{ \&c.}\\ \text{in infinitum.}\end{array}\right.$$

$$\begin{array}{l} +1 \\ +a - aa \\ \hline \quad +aa \\ \quad +aa - aaa \\ \hline \qquad +aaa \text{ \&c.}\end{array}$$

Hæc pauca exempla ſatis ſint. Cæterum patet multiplicationem & diviſionem in quantitatibus litteralibus non ſecus ac in numeris ſibi mutuam probationem conferre ita ut multiplicatio per diviſionem & viceverſa diviſio per multiplicationem confirmetur.

Scol. In hoc capite frequens fuit mentio de quantitatibus negativis, quarum genuinam notionem paucis iterum explicare non abs re erit. Si duæ quantitates magnitudine æquales, ad partes directè oppoſitas ſimul & in eodem ſubjecto conjunctè intelligantur, ſeſe mutuò deſtruunt illarumque effectus nihilo æqualis eſt. Ita ſi potentiæ duæ æquales in partes directè oppoſitas agunt, virium illarum effectus nullus eſt. Pari modo ſi aliquis habeat 100 num-

nummos, totidemque alteri debeat, jam illi 100 nummi, ſi ad hujus hominis poſſeſſionem referantur, pro nihilo conſiderari debent. Si autem quis 100 nummos habeat & 200 alteri debeat, jam poſſeſſio hujus hominis negativa eſt &, ut ita dicam, nihilo minor. Si aliquis ad propoſitum locum iter facturus, ad partem directè oppoſitam progrediatur, jam hujus hominis iter tanquam negativum & minus nihilo haberi debet, ſi ad finem propoſitum referatur. Igitur probè tenendum eſt quid intelligatur per quantitatem negativam & nihilo, ut dicunt, minorem. Quantitas negativa non minus realis eſt quam quantitas poſitiva; Sed nihilo minor dicitur quatenùs poſitivæ quantitati opponitur; junĉta ſcilicet quantitati poſitivæ, ipſam minuit, quem quidem effeĉtum, hanc nempè diminutionem, ipſum *zero* non producit. Quare quantitas negativa ratione effeĉtus tantùm & *relativè* non autem *abſolutè* nihilo minor dicitur. Hunc loquendi modum a nonnullis uſurpatum ita explicavimus ut nihil difficultatis tyronibus faceſſere poſſit.

CAPUT IV.

De iiſdem operationibus in numeris fractis.

I.

Numeri fracti definitionem jam in primo capite tradidimus. Si diviſor excedat dividendum, duo numeri a ſe invicem, interpoſita lineola, ſeparantur ita ut dividendus ſupra lineolam, & diviſor infra ſcribantur in hunc modum $\frac{2}{4}$, $\frac{4}{7}$ &c. Similiter ſi quantitas aliqua litteralis per aliam dividenda proponatur, & diviſio fieri non poſſit, eodem modo ſcribuntur duæ quantitates; ita $\frac{a}{b}$ ſignificat quotum ex, a, per, b; tales autem quoti *fractiones*, vocantur. Quantitas ſuperior dicitur *numerator*, inferior autem *denominator* appellatur. Denominator exprimit numerum partium in quas totum aliquod diviſum fingitur; numerator autem deſignat quot ejuſdem partes accipiantur, vel, quod idem eſt, quoties una ex illis partibus ſumatur, ac proinde pars illa conſiderari poteſt tanquam unitas aliqua. E. G. fractio $\frac{3}{4}$ nihil eſt aliud quam pars quarta alicujus totius ter ſumpta; hæc autem pars quar-

quarta tanquam unitas altera haberi etiam poteſt.

II. Ex fractionum natura intelligitur qua ratione numerus integer ad fractum reducatur atque etiam ad denominatorem datum. Ita ſi numerus, 3, reducendus proponatur ad fractionem cujus denominator 4; multiplicetur 3 per 4, ſcribaturque $\frac{12}{4}$, erit hæc fractio æquivalens ternario, ut patet; cum numerus, 3, multiplicetur ſimulque dividatur per 4 Sed tales fractiones in quibus numerator major eſt denominatore pro veris fractionibus non habentur, atque *impropriè* duntaxat ita appellantur. Pari ratione ſi quantitas, a, reduci debeat in fractionem litteralem cujus denominator ſit, b; habebitur $\frac{ab}{b} = a$.

Ex his etiam patet quomodo fractiones quæ diverſum habent denominatorem ad eundem redigantur. Sint fractiones duæ $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, multiplicetur fractio $\frac{a}{b}$, per, d, ſimulque dividatur per d, erit $\frac{a \times d}{b \times d} = \frac{a}{b}$. Simili modo multiplicetur fractio $\frac{c}{d}$ per, b, ſimulque dividatur, erit $\frac{c \times b}{d \times b} = \frac{c}{d}$. Itaque generatim fractiones ad eundem denominatorem reducuntur, multiplicando numeratorem unius per denominatorem

alterius & viceverſa, ſcribendoque pro denominatore communi productum ex utroque denominatore. Evidens eſt hanc operationem eandem eſſe pro quolibet fractionum numero, multiplicentur ſcilicet numeratores ſinguli ſeorſim ſumpti per denominatores ſingulos, proprio excepto denominatore, producta ſingula dabunt numeratores ſingulos quæſitos. Deinde denominatores ſinguli in ſeipſos ducantur, habebitur denominator communis quæſitus; ita fractiones $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{c}$, $\frac{c}{d}$, reducuntur ad $\frac{acd}{bcd}$, $\frac{bbd}{bcd}$, $\frac{ccb}{bcd}$. Patet rem perindè ſe habere in numeris quibuslibet fractis; ita fractiones $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, *reſpectivè* æquales ſunt fractionibus $\frac{40}{60}$, $\frac{45}{60}$, $\frac{48}{60}$.

III. Hinc facile adduntur & ſubtrahuntur fractiones, reducantur ſcilicet ad denominatorem communem, ſumatur numeratorum ſumma vel differentia, & ſubſcribatur denominator communis. In 1°. caſu habebitur additio, in altero autem ſubtractio. Ita $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{d}{e} = \frac{ade + bce + ddb}{bde}$, & $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}$. Similiter in numeris $\frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{8 + 9}{12} = \frac{17}{12} = 1\frac{5}{12}$. Sed $\frac{4}{5} - \frac{3}{4} = \frac{16 - 15}{20} = \frac{1}{20}$. Fractiones ex integris & fractis compoſitæ qualis eſt $1\frac{5}{12}$, appellantur mix-

mixtæ. Ex his autem ſtatim intelligitur quomodo numeri integri & fracti ſimul addi poſſint, vel a ſe invicem ſubtrahi; integri ad fractos reducantur & ad denominatorem communem, atque operatio fiat ut ante. Quamvis autem additionis & ſubtractionis operationes ex dictis ſint manifeſtæ, demonſtrari tamen poſſunt hoc modo. Sint fractiones duæ $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{b}$ ad eundem denominatorem reductæ, erit $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$, & $\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}$. Etenim ponatur $\frac{a}{b} = m$, & $\frac{c}{b} = n$, erit, facta multiplicatione per b, $a = mb$, $c = nb$, & $mb + nb = a + c$, ac proindè $m + n = \frac{a+c}{b}$; hoc eſt $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$. Simili modo patet eſſe $\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = m - n = \frac{a-c}{b}$.

IV. Nulla reductione opus eſt ubi fractiones multiplicare & dividere oportet; in multiplicatione ſatis eſt numeratores & denominatores invicem ducere, habebitur numerator & denominator fractionis quæſitæ quæ erit productum ex datis fractionibus emergens. Contrà verò ſi fractio per aliam fractionem dividenda ſit, numerator dividendæ per alterius denominatorem eſt multiplicandus, & illius denominator in hujus numeratorem ducen-dus

duæ eſt. Ita productum ex $\frac{a}{b}$ per $\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$. Quotus autem ex $\frac{a}{b}$ per $\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}$. Etenim ponatur $\frac{a}{b}=m$, erit, ut antè $a=bm$. Similiter ponatur $\frac{c}{d}=n$, erit $c=dn$. Jam demonſtrandum ſupereſt eſſe $\frac{ac}{bd}=mn$, & $\frac{ad}{bc}=\frac{m}{n}$; quod quidem facilè patet, ſubſtituendo loco a & c, illorum valores bm & dn, erit enim in primo caſu $\frac{bdmn}{bd}=mn$; in caſu autem altero fiet $\frac{bdm}{bdn}=\frac{m}{n}$. Demonſtratio generalis eſt ac proindè in numeris quibuslibet fractis eadem eſt operatio. Sic productum ex $\frac{2}{6}$ in $\frac{4}{8}=\frac{8}{48}$. Sic quotus ex $\frac{3}{6}$ per $\frac{2}{16}=\frac{48}{12}=4$. Manifeſta quoque eſt operandi ratio, ſi numerus fractus per integrum multiplicari aut dividi debeat, conſiderari enim debet numerus integer tanquam fractio impropria in qua denominator eſt unitas & reliqua peragenda ut ante. Quare

re patet in multiplicatione numerum integrum per numeratorem eſſe multiplicandum; contrà antem in diviſione per denominatorem. Nec mirum eſſe debet, ſi fractio per fractionem diviſa præbeat numerum integrum; cum revera una fractio bis, ter, quater &c. in alia contineri poſſit. Itaque fractionis valor per multiplicationem minuitur, augetur per diviſionem; quod quidem paradoxum videtur iis qni multiplicationis & diviſionis naturam non ſatis attendnnt.

Ex dictis etiam facilè patet *fractiones fractionum* ad multiplicationem referri; *fractionem fractionis* appellant fractionis alicujus partem. Ita ſi ſumantur $\frac{2}{3}$, fractionis $\frac{1}{4}$, operatio illa ad diviſionem non pertinet, ſed ad multiplicationem. Etenim ſi ſumenda proponeretur duntaxat pars $\frac{1}{3}$ fractionis $\frac{1}{4}$, multiplicandus eſſet denominator per, 3, habereturque $\frac{1}{12}$. At ſumi non debet duntaxat pars tertia, duæ tertiæ partes ſnmendæ proponnntnr; quare productum præcedens dnplo majus fieri debet, hoc eſt, nnmerator multiplicandus eſt per 2. Eodem modo reduci debent aliæ qnotlibet fractiones fractionum, multiplicando numeratores ſingulos & ſingulos denomiuatores.

Ex

Ex fractionum doctrina colligi poſſunt operationum arithmeticarum compendia, plurima, ſi de quantitatibus variæ ſpeciei agatur. E. G. Quæritur quanti conſtiterint 35 menſuræ mercis alicujus, ſi menſuræ unius pretium ſit 24 nummorum, & aſſium 15. Multiplicentur primo 35 per 24. erit productum 840. Quoad alteram multiplicationis partem, conſiderari poteſt eſſe 15 = 10 + 5. Jam ſi aſſes, 10, nummo æquivalerent, productum foret 35. At ſunt pars decima duntaxat nummi unius, quarè 35 dividi debet per 10. Simili modo operandum eſt in ultima multiplicationis parte, atque emerget productum ex nummis nummorumque partibus compoſitum. Ille operandi modus dicitur operatio per partes *aliquotas*. Partes autem aliquotæ quantitatis alicujus appellantur quæ ipſam quantitatem accuratè dividunt; secùs autem partes *aliquantæ* vocantur. Cæterum exercitatio atque attentio multa docebunt quæ fuſiùs explicare ſuperfluum eſſet.

V. Explicatis arithmeticæ operationibus in numeris fractis, jam ſupereſt ut communes, ſi quos habeant, fractionum diviſores inquiramus. Si numeri nullum habeant communem diviſorem præter unitatem, numeri illi inter ſe *primi* dicuntur,

tur, cujuſmodi ſunt 1. 5. 7. 11. 19, quos ſola unitas metitur. At numeri *compoſiti* appellantur quos præter unitatem alii quoque numeri metiuntur; Sic 12 componitur ex 2 & 6, itemque ex 3 & 4. Quarè 2. 3. 4. 6. metiuntur 12, ſeù aliquoties ſumpti 12, adæquant; Illi autem numeri dicuntur *factores* ipſius numeri 12. Si igitur fractionis alicujus denominator ſit numerus compoſitus & reſolvi poſſit in alterius fractionis denominatorem, inſtituta diviſione per numerum qui ſit etiam numeratoris diviſor communis, jam licebit fractionem hanc ad minimos terminos deprimere, quod ita præſtari poteſt. Dividatur major numerus per minorem; ſi nihil ex diviſione ſuperſit, jam minor numerus eſt maximus diviſor communis. Si autem reſiduum aliquod fuerit, diviſor datus per hoc reſiduum dividatur; ſi diviſio accuratè fiat, primum reſiduum erit maximus diviſor communis. Si autem diviſio non ſit accurata ſed alterum maneat reſiduum, per hoc ſecundum reſiduum dividatur primum; Si autem nullum ſuperſit tertium reſiduum, jam reſiduum ſecundum pro maximo diviſore communi haberi debet, atque ita progrediendum donec nihil ſuperſit, atque ultimus diviſor erit maxima, ut vocant, communis duorum numerorum

 men-

menſura, qua inventa fractio ex his duobus numeris compoſita ad minimos terminos reducitur. Exemplo ſit fractio $\frac{91}{294}$. Dividatur 294 per 91, neglectoque quoto 3, reſiduum eſt 21. Rursùs dividatur 91 per 21, iterumque neglecto quoto, reſiduum eſt 7. Tandem reſiduum primum 21 per alterum 7 dividatur, habetur quotus 4 & diviſio eſt accurata. Quarè numerus 7 eſt maximus communis diviſor per quem diviſis numeratore & denominatore, fractio præcedens in hanc ſimpliciorem abit, $\frac{13}{42} = \frac{93}{294}$; æquales autem eſſe fractiones illas ex natura diviſionis omninò patet. At ſi diviſione inſtituta, ad unitatem tandem ultimum reſiduum perveniatur, jam nulla eſt menſura communis præter unitatem. Eadem planè eſt operatio in quantitatibus litteralibus; hoc ſolum obſervandum eſt, nempè quantitates reſiduas per earum ſimplices diviſores eſſe dividendas, & quantitates ſecundum ejuſdem litteræ dignitatem ſemper eſſe ordinandas. Invenienda ſit maxima communis menſura quantitatum $a^2 - b^2$, & $a^2 - 2ab + b^2$. Dividatur $a^2 - 2ab + b^2$ per $a^2 - b^2$, reſiduum ſit $- 2ab + 2b^2$, quod divida-

vidatur per $-2ab$ ut reducatur ad $a-b$. Iterum dividatur a^2-b^2 per $a-b$; diviſio accuratè ſuccedit, ac proindè maximus diviſor communis eſt $a-b$.

Tota hujus operationis ratio pendet ex hoc diviſionis principio; ſi nempè quantitas aliqua metiatur & diviſorem & reſiduum, metiri quoque debet ipſum dividendum; eſt enim dividendus æqualis producto ex diviſore in quotum & ipſi reſiduo ſimul. Ita in exemplo præcedenti, $a-b$, metitur diviſorem a^2-b^2 atque etiam reſiduum $-2ab+2b^2$; quarè metiri etiam debet ſummam $a^2-2ab+b^2$.

Porrò quamvis in numeris & quantitatibus litteralibus eadem ſit operatio, ut tamen diviſor per reſiduum poſſit dividi, ſæpe oportet primos terminos ita præparare ut alter per alterum accuratè dividi poſſit ſine fractione. Id autem fit obſervando in novi diviſoris termino primo quantitates quæ non habentur in primo termino dividendi; ſi autem per eas dividi poteſt totus diviſor, is totus dividatur; ſin minùs, multiplicetur totus dividendus per illas quantitates quæ non occurrunt in dividendo, atque ita faciendum in tota operationis ſerie, ſi neceſſe ſit. Ita in præcedenti exemplo, ubi perventum eſt ad reſiduum $-2ab+2b^2$, reſiduum illud

dividi præſcripſimus per, b. Hæc antem præſcripta præparatio tota peudet ex hoc principio; nempè quantitates duæ A, B, communem retinebuut maximum diviſorem, ſi multiplicetur vel dividatnr quantitas alterutra putà A per qnantitatem quæ nullum cum quantitate B, commnnem diviſorem habeat. Illud autem principium ex ipſa diviſoris communis notione eſt omninò evidens.

VI. De fractionum communi diviſore nnum addendnm eſt quod deindè ntilitatis maximæ futurum eſt. Si numeri duo *primi* fuerint, aut eorum alteruter duntaxat *primus* fuerit, evidens eſt ex ipſa numerorum primorum definitione & ex communium diviſorum regula, numeros illos nullum, præter nnitatem, diviſorem communem habere. Quarè fractio ex duobus numeris primis compoſita, puta $\frac{a}{b}$, ad ſimpliciores terminos reduci non poteſt. Ergò productum, ac, ex duobus numeris primis ab ipſo, b, diverſis, non poteſt accuratè dividi per b. Nam ponatur $\frac{ac}{b} = m$, erit $\frac{a}{b} = \frac{m}{c}$; quod fieri non poteſt; oporteret enim b & c, habere diviſorem communem, quod eſt contra hypotheſim.

Eo-

Eodem modo demonſtrabitur fractionem $\frac{ac}{b}$ ad ſimpliciores terminos deprimi non poſſe; nam foret $\frac{ac}{b} = \frac{m}{g}$, & g haberet diviſorem communem cum, b. Similiter oſtendetur fractionem $\frac{ac}{bd}$, in qua, d, eſt numerus primus ad ſimpliciorem expreſſionem reduci non poſſe; foret enim $\frac{ac}{bd} = \frac{mb}{gh}$, ac proindè, bd, productum ex duobus numeris primis æquale foret producto ex duobus aliis numeris, g, h, ideoque $\frac{b}{g} = \frac{h}{d}$; cum tamen b, ex una parte &, g, ex altera ſint numeri primi; quod fieri non poſſe evidens eſt ex demonſtratis; fractio enim quælibet in qua alteruter terminus eſt numerus primus ad ſimpliciores terminos redigi non poteſt. Simili ratione demonſtrabitur ultra redigi non poſſe fractionem $\frac{abc}{bd}$ in qua, c, eſt numerus primus; & generatim productum ex numeris primis quibuſcumque diviſum per productum ex aliis quibuſcumque numeris itidem primis, ad ſimpliciores terminos re-

duci non poteſt. Quarè ſi $\frac{a}{b}$ ſit fractio ad minimos terminos rednċta, erunt quoqne $\frac{aa}{bb}$, $\frac{a^3}{b^3}$, & generatim $\frac{a^n}{q^n}$, fractiones ad ſimpliciſſimos terminos redactæ, ac proindè fractio quælibet ſivè pura ſive mixta, ad potentiam qnamlibet evecta, ſemper manet fractio.

Scol. Præter fractiones in hoc capite explicatas, conſiderari etiam debent fractiones quæ *decimales* appellantur. Illæ ſcilicet fractiones pro denominatore habent unitatem cum tot ſeqnentibus cyphris quot ſunt nnmeri in numeratore; atque eam ob cauſam non ſcribitnr denominator, ſed numerator duntaxat cujus numeris præfixa eſt virgula, alii punctum præfigunt, quod fit ut numerator a numeris integris diſtinguatur. Ira ad exprimendam fractionem $19\frac{4}{10}$ ſcribi ſolet 19, 4. Ad exprimendam fractionem $19\frac{4}{100}$ ſcribitur 19, 04; cyphra nnmero 4 præfixa indicat denominatorem eſſe 100. Fractio $19\frac{1000}{4}$ ita exprimitur 19, 004. Ex fractionnm decimalinm ſignificatione patet primum numerum poſt virgulam deſignare decadas, ſecundum centenarios & ita deinceps per decadas ſemper progrediendo; Sic 4,

217

$217 = 4 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{7}{1000}$. Fractionum decimalium utilitas maxima eſt ad ubtinendum quutum proximè verum, ſi diviſio accuratè fieri non poſſit. E. G. Si dividendus proponatur numerus, 147475 per 362, quotus iuvenitur 407, cum reſiduo 141 cui addatur 0, dividaturque 1410 per 362, quotus erit 3, cum uovo reſiduu 324 cui iterùm addatur u, dividaturque 3240 per 362, quotus prodit 8 cum reſidnu 344 cui addatur, 0, in nova taudem diviſione quotus emergit 9; quod autem remanet 182 iterùm dividi puſſet, ſed operatiuuis ordiuem exhibuiſſe ſatis ſit. Quarè quotus eſt 407, 389, quem quidem accuratiorem eſſe evidens eſt.

Eadem methodo fractio vulgaris in fractionem decimalem reducitur. Si fractio $\frac{3}{4}$ in fractionem decimalem reducenda proponatur, numeratori, 3, addatur, 0, dividaturque 30 per 4, quotus eſt 7 cum reſiduu 2 cui addatur 0, rursùſque 20 per 4 dividatur quotus eſt 5, ſine ullo reſiduo; quare $\frac{3}{4} =$ u, 75. Et requidem ipſa, cum ſit 25 quarta pars numeri 100, numerus 75 erit $\frac{3}{4}$ ejuſdem uumeri 100. Hinc generatim patet quu artificio fractiu vulgaris ad decimalem reduci poſſit; multiplicetur nempè numerator fractionis datæ per 100, vel 1000 &c., productum illud di-

viſum per denominatorem erit numerator fractionis decimalis cujus denominator eſt 100, vel 1000 &c. Sæpè tamen contingit fractiones ad decimales accuratè reduci non poſſe, etiamſi diviſionum reſiduis plures utcumque cyphræ addantur. Id autem facilè dignoſcitur, ſi nempè ad idem reſiduum ſemper perveniamus, vel ſi iidem numeri eodem ordine redeant. Ita ſi fractionem $\frac{4}{7}$ ad decimalem reducere volueris, invenies 0, 571428571428571428 &c. nec unqnam pervenies ad diviſionem accuratam. Pari modo ad reducendam fractionem $\frac{5}{12}$ in decimalem, invenies 0, 416666 &c. In his autem caſibus duas vel tres primas decimales adhibere ſatis ſit, reliquæ autem negliguntur. Ita poni poſſunt $\frac{4}{7} = 0, 57$, & $\frac{5}{12} = 0, 417$.

Hæc quidem pauca ſatis eſſe poſſent iis qui demonſtrationis ſeveritatem non quærunt; ſed rem utiliſſimam generatim & omninò accuratè oſtendemus. Sit $\frac{p}{q}$ fractio vulgaris reducenda ad fractionem $\frac{n}{10^n}$, in qua, n, exprimit cyphrarum numerum, ponaturque, r, numerus integer & $r = \frac{p \times 10^n}{q}$. Sed eſt $10^n = 2^n\, 5^n$;

non

non poteſt autem $\frac{p \times 2^n \times 5^n}{q}$ abire in numerum integrum, niſi, 9, æqualis ſit alicui poteſtati ipſius, 2, vel 5 vel 2×5, vel tandem producto ex aliqua poteſtate ipſius 2 in aliquam poteſtatem ipſius 5, quæ tamen poteſtates ſunt minores quam, n; ponitur enim fractionem $\frac{p}{q}$ eſſe ad minimos terminos reductam, hoc eſt, p, &, q, nullum habere diviſorem communem. In alio quolibet caſu fractio $\frac{p \times 10^n}{q}$, nunquam fieri poterit numerus integer r. Attamen quo major erit, n, hoc eſt, quo plures erunt cyphræ in denominatore, eo magis fractio $\frac{r}{10^n}$ accedet ad fractionem $\frac{p}{q}$. Si enim $p \times 10^n$ per, q, dividatur quotus inventus, r qui minor erit, juſto major fiet ſi unitate augeatur. Quarè $\frac{r}{10^n}$ minor eſt quam $\frac{p}{q}$, & $\frac{r \times 1}{10^n}$, major.

Quatuor arithmeticæ operationes in fractionibus decimalibus eadem omninò ratione qua in numeris integris tractantur; ſed habenda eſt maximè ratio virgulæ qua fractiones ab integris dirimuntur. Hæc vir-

virgula in eadem linea verticali jacere debet, ſi plures quantitates vel in unam ſummam colligendæ ſunt vel ab invicem ſubtrahendæ. Si verò multiplicatio inſtituitur, eum locum in producto occupare debet virgula ut totidem poſt ſe notas relinquat quot erant in utraque fractione; tandem ſi diviſio peragitur, dividendi numeri decimales notæ probè obſervandæ ſunt; nam in quoto & diviſore ſimul totidem eſſe debent poſt virgulam notæ quot erant in dividendo. Quatuor illarum operationum exempla exhibebimus.

Additio.	Subtractio.
23, 304	49, 638
3, 9567	17, 16
149, 86.	32, 478
177, 120 7	Diviſio.
Multiplicatio.	8, 445 / 3, 22 = 2, 6.
12, 35	6, 44
4, 2	2005
24 70	1932
49 40	73
32, 478	

Unum autem in diviſione notandum eſt; Si nempè in diviſore plures occurrant notæ decimales quam in dividendo, tunc deci-

cimalibus dividendi adjunges quot volueris cyphras, ita ut tamen nutæ decimales in dividendo plures ſint quam in diviſore ut nempè in quoto aliquæ decimales notæ haberi poſſint. Tota operationum illarum ratio ſtatim manifeſta fiet, ſi fractiones decimales vulgari modo exprimantur. Ita in exemplu diviſionis præcedentis 8, $445 = \frac{8445}{1000}$ & 3, $22 = \frac{322}{100}$. Itaque dividi debet fractio prior per ſecundam; evidens autem eſt cyphram unam duntaxat in quoto adeſſe & hinc facilè intelligitur cyphrarum numerum in quoto eſſe ſemper æqualem cyphrarum in diviſore & dividendu differentiæ. In aliis tribus regulis faciliùs patet operandi ratio.

CAPUT V.

De radicum extractione.

I.

EXplicavimus jam in capite 2° quid ſit *poteſtatum* formatio. Quantitatis alicujus *poteſtas prima*, vel *primus gradus* eſt quantitas ipſa ſolitariè ſpectata. Ita prima poteſtas ipſius, a, eſt a. Productum ex quantitate aliqua in ſeipſam dicitur *poteſtas ſecunda*, vel etiam *quadratum*, ita a^2 eſt quadratum. Ipſa autem quantitas dicitur

tur *radix* quæ vocatur *quadrata*, ſi poteſtas ſit ſecunda vel quadratum. Si quadratum in ipſam quantitatem ducatur, productum dicitur *poteſtas tertia* vel *cubus*, ita a^3 eſt cubus ipſius a; quantitas autem dicitur *radix cubica*. Et generatim ſi quantitas evebatur ad poteſtatem cujus iudex eſt, n, babebitur poteſtas gradus, n. In hoc autem capite præſertim conſiderabimus radicum quadratæ & cubicæ extractionem; quod ut clarè fiat ipſam quadrati & cubi formationem primùm inveſtigabimus, atque deindè ad operationes arithmeticas recto ordine progrediemur. Sit quantitas litteralis, $a+b$, ad quadratum evehenda, prodit $a^2+2ab+bb$. Jam verò quadrati hujus formationem, ſeu partes ſingulas expendamus. Quadratum binomii $a+b$ continet 1° Quadratum, aa, primæ partis, a. 2°. Productum 2ab, ex duplo primæ partis in ſecundam. 3°. Quadratum partis ſecundæ nempè bb. Simili modo ſi multiplicetur $a+b+c$ per $a+b+c$, orietur quadratum $\overline{a^2+2ab+b^2}+\overline{2a+2b}\times c+c^2$. In hoc quadrato rurſùs conſiderandæ ſunt partes ſingulæ; continet 1°. Quadratum $a^2+2ab+b^2$ ex duobus primis terminis $a+b$. 2°. Productum ex duplo duorum priorum terminorum in tertium terminum $=\overline{2a+2b}\times c$.

Tan-

Tandem continet quadratum c^2, tertii termini. Simili modo progredi licet pro alia qualibet quantitate ex pluribus quam tribus terminis compoſita; tales verò quantitates magis compoſitæ appellari ſolent *polynomia*.

Eadem omninò ratione intelligitur cubi formatio. Binomium $a + b$ ad 3^{am} poteſtatem evehatur, multiplicetur nempè quadratum $a^2 + 2ab + b^2$, per $a + b$, prodit cubus $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. Cubi hujus partes ſingulæ ſunt 1°. Cubus primi termini, nempè a^3. 2°. Productum ex quadrato a^2 primi termini in triplum terminum ſecundum, ſcilicet $3a^2b$. 3°. Productum ex primo termino, a, in triplum quadratum ſecundi termini, nempè $3ab^2$. 4°. Cubus ſecundi termini ſcilicet b^3.

Simili modo operandum eſt pro trinomio $a + b + c$ invenieturque cubus $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3a^2c + 6abc + 3b^2c + 3ac^2 + 3bc^2 + c^3$. In hoc autem cubo præter duorum primorum terminorum cubum nempè $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, diligenter conſiderari debent aliæ partes. 1°. Productum ex triplo quadrato duorum primorum terminorum in tertium terminum c, nempè $3a^2c + 6abc + 3b^2c = \overline{a^2 + 2ab + bb} \times 3 \times c$ 2°. Tripla ſumma duorum primorum terminorum per ter-

tertii termini quadratum multiplicata, ſcilicet $3ac^2 + 3bc^2 = \overline{a+b} \times 3 \times c^2$. 3° Tandem tertii termini cubus, nempè c^3.

II. Ex poteſtatum compoſitione facilè colligitur illarum reſolutio, ſive radicum extractio. Sit quantitas litteralis $x^2 - ax + \frac{1}{4}a^2$ ex qua extrahenda ſit radix quadrata. Sumatur primi termini radix quadrata, x, cujus quadrato ſubtracto remanent termini duo $- ax + \frac{1}{4}a^2$. Deindè ſumatur duplum ipſius x per quod dividatur ſecundus terminus $-ax$, quotus fit $-\frac{1}{2}a$ qui multiplicetur per, x. Tandem fiat quadratum quoti $-\frac{1}{2}a$, atque producta illa ex reſiduo $- ax + \frac{1}{4}a^2$ ſubtrahantur, nihil remanet. Quarè radix quadrata eſt $x - \frac{1}{2}a$. Tota operatio patet ex numero præcedenti. En typus calculi.

$$\begin{array}{lll}
x^2 - ax + \frac{1}{4}a^2 \;(\,x - \frac{1}{2}a & & \\
\underline{x^2} & & \\
2x - \frac{1}{2}a\,) & - ax & + \frac{1}{4}a^2 \\
\times - \frac{1}{2}a\,) & \underline{- ax} & \underline{+ \frac{1}{4}a^2} \\
 & 0 & 0
\end{array}$$

Cæterum ſi radix plures habuerit quam duos terminos, jam duo primi termini poſt primam operationem velut unicus terminus conſiderari debent & reliqua peragenda ut antè, quod quidem patet ex demonſtratis.

Proponatur extrahenda radix cubica ex quantitate litterali $c^3 - 3c^2y + 3cy^2 - y^3$.

y^3. Ex primo termino extrahatur radix cubica quæ eſt c, cujus cnbus c^3 auferatur, remanent termini $- 3c^2y + 3cy^2 - y^3$. Jam quia notum eſt ſecundum terminum multiplicari per triplum quadratum primi, ſumatur termini, c, triplum quadratnm p r quod dividatur ſecnndus terminus $- 3c^2y$, prodit quotus $-y$ qui erit ſecunda pars radicis. Quia verò cubus quilibet continet cubnm ex duobus primis terminis radicis, ſumatur cubus terminorum $c - y$, deindè a reliquis terminis auferatur, quo facto nihil remanet ac proindè radix accurata eſt $c - y$. Totus calculi typus ex præcedenti facilè intelligitur.

III. Ex demonſtrationibus præcedentibus facilè patet radicum extractio in quantitatibus numericis.

Exempl.

Extrahenda ſit radix quadrata ut in præſenti exemplo. Numerum datum in claſſes divide quarum ſingulæ duas notas contineant, initio a poſtremis facto; nihil autem refert ſive unica tantum nota conſtet prima claſſis

38. 94. 89. (624, 09
36
―――
294
122
244
―――
5089
1244
4976
―――

ſivè

ſivè notis duabus.	11300
Quære radicem ve-	12480
ram aut proximè	0
veram numeri 38.	
quæ in noſtro caſu	1130000
eſt 6 Scribe, 6,	124809
loco radicis & ejus	1123281
quadratum 36 au-	
fer ex 38. Reſiduo	6719. &c.

2 adjunge notas claſſis proximè ſequentis, & hujus novi numeri poſtrema nota neglecta, quære quoties duplum radicis hactenus inventæ ſive 12 contineatur in 29, invenietur, 2, ſcribe ergò 2 in radice & ex 294 aufer productum ex 2 in 122 nempè 244, remanet 50; huic autem reſiduo adnecte notas claſſis proximè ſequentis. Rursùs contempta novi numeri poſtrema nota, quære quoties duplum radicis hactenùs inventæ ſcilicet 124 contineatur in 508, quotus erit 4, iterumque ex numero ſuperiori aufer productum ex 1244 in 4, nempè 4976, reſiduum eſt 113. Quarè radix proximè vera numeri propoſiti eſt 624; numerus autem ille foret perfectè quadratus ſi numero 113 minueretur. Quamvis autem radix quadrata non ſit accuratè vera, ad eam tamen fractionum decimalium ope pro arbitrio licet accedere. Reſiduo 113 addantur cyphræ duæ, ut

ut hic factum vides, & habeatur numerus 624 tanquam prima pars radicis cujus duplum ſumatur nempe 1248, dividaturque 1130 per 1248, quotus eſt o, quare ſcribe, o, in radice, & multiplica 12480 per o, productumque, o, aufer ex 11300, remanent 11300. Huic reſiduo iterùm addantur cyphræ duæ, ſumaturque duplum radicis nempe 12480 per quod dividatur 113000, ſcribaturque quotus 9 in radice per quem multiplicetur numerus 124809, productumque 1123281 auferatur ex 1130000, reſiduum fit 6719. operatio rurſus continuari poſſet, ſed ſatis patet methodus cujus ope radicem proximè veram obtinere licet & ad eam magis ac magis accedere. Tota operationis ratio manifeſta eſt ex fractionum decimalium natura.

In hujus operationis ſerie idem notare oportet quod in diviſione obſervatum eſt; nempè ſi poſt adjectas alicui reſiduo notas duas claſſis proximè ſequentis, duplum radicis inventæ non contineatur in numero qui per illud dividendus eſt; poſtrema hujus dividendi nota neglecta, cyphra ſcribenda eſt in radice, & claſſis proximæ notis duabus demiſſis, operatio continuanda. Evidens autem eſt hanc operationem eſſe diviſioni ſimillimam in qua radix ſit quotus, diviſor verò ſit duplum radicis

poſtremò inventæ anctum nota quæ deinceps inveſtigatur. Hoc unum intereſt quod in diviſione diviſor ſemper eſt idem, hic autem ſemper augetur; in diviſione totus diviſor cognoſcitur, hic autem ignota eſt novi diviſoris nota quæ inquiritur; atque id in cauſa eſt cur in hac diviſione inſtituenda, poſtrema dividendæ quantitatis nota prætereatur. Si contingeret diviſorem eſſe majorem V. G. in præſenti exemplo ſi productum ex 2, in 122 ſubtrahi non poſſet ex 294, jam in radice ſcribendus eſſet numerus proximè minor & tota operatio eſſet reformanda. Sed in caſu noſtro id minimè contingit; quare nulla correctione opus eſt. Unum tandem ſupereſt notandum cur nempè poſt duplum radicis inventæ ſcribatur radix nova & deindè numerus totus per radicem novam multiplicetur. Ita in præſenti exemplo poſt duplum primæ radicis 12, ſcribitur 2, totuſque numerus 122, multiplicatur per novam radicem, 2; operationis ratio manifeſta eſt; cum enim numerus, 2, in radice duas exprimat decadas, hujus numeri quadratum versùs ſiniſtram promoveri debet, ut patet ex notarum arithmeticarum ſignificatione.

Ad radicis cubicæ extractionem jam veniendum eſt. Pro radice cubica methodus eſt

eſt admodum ſimilis & iiſdem innititur principiis. Extrahenda ſit radix cubica, ut in præſenti exemplo. Diviſo numero in claſſes per ternas notas incipiendo a poſtremis notis, prima claſſis quæ poterat continere vel tres notas, vel duas, in hoc caſu unicam continet. Quæratur radix cubica numeri, 5, proximè minor quæ eſt 1. Hujus cubus 1, ſubtrahatur a prima claſſe, 5, reſiduum eſt 4, cui adnectatur claſſis ſequens, ut hic factam vides. Deindè ita dicendum, prima pars radicis, 1, pro decade haberi debet ſi conferatur cum ſecunda parte. Sumatur itaque numeri 10, quadratum 100 & per illius triplum 300, dividatur 4305 invenietur quotus 7; quilibet enim alius foret juſto major, ſi 7 excederet, ut pa-

Exempl.

```
5.305.472. (174, 4
1
—————
4305
 300
—————
2100
1470
 343
—————
3913
—————
 392472
  86700
—————
 346800
   8160
     64
—————
 355024
—————
37448000.
```

tet operationem experiendo. Jam multiplicetur 300 per 7, habetur productum 2100. Dic præterea $7 \times 7 = 49$, & $49 \times 10 = 490$, poſteà $490 \times 3 = 1470$, quod ſcribe infra 2100. Tandem $7 \times 7 \times 7 = 343$, quod ſcribi debet infra 1470. Addantur numeri 2100, 1470, & 343 & ſumma 3913 auferatur ex numero 4305, reſiduum eſt 392. Demittatur claſſis tertia 472 & duæ primæ partes radicis velut pars unica conſiderentur. Hæc autem pars quæ eſt 17, æquivalet 170 ſi conferatur cum tertia parte quæſita. Sumatur hujus numeri 170 triplum quadratum 86700 per quod dividatur pars cubi reliqua 392472, prodit quotus, 4, quem ſcribe in radice; multiplicetur diviſor 86700 per 4, productum fit 346800 quod infrà ſcribitur. Dicas deinde $4 \times 4 = 16$; $16 \times 170 \times 3 = 8160$, quod productum ſcribe infra 346800, atque infra ſcribi debet cubus ipſius 4 nempè 64. Addantur tres illæ quantitates quarum ſumma 355024 ex reliqua cubi parte ſubtrahatur, reſiduum fit 37448. Quare numerus propoſitus non eſt cubus perfectus; ſed ad radicem proximè veram licebit accedere ſi reſiduo addantur tres cyphræ, ut in præſenti exemplo factum eſt; & eadem operatio deindè pro alio quolibet fractionum decimalium numero

mero iteretur, magis ac magis accurata ſiet radix inventa; Illud autem obſervandum eſt diligenter inventas radicis partes velut partem unicam tractandas eſſe, ſi pars alia inveſtigari debeat.

In extractione radicis quadratæ & cubicæ, diximus tot eſſe radicis partes quot ſunt diverſæ numeri propoſiti partes. Id verò demonſtratione indiget. Quantitas quælibet ex duobus conſtans numeris unicam dumtaxat in radice partem habere poteſt. conſideretur numerus, 99, omnium qui duobus conſtent notis maximus. Deindè radicem ex duabus notis compoſitam omnium minimam 10, conſideremus, quadratum erit 100 quod numero 99 majus eſt, ac proindè radix duas notas continere non poteſt. Similiter quantitas omnium minima quæ tres habeat notas eſt 100 cujus radix quadrata eſt 10 quæ proindè duas continet notas; at quantitas omnium maxima quæ tres habeat notas eſt 999. Cujus radix tres notas habere non poteſt; nam numerus omnium minimus tribus conſtans notis eſt 100, cujus quadratum ſit 10000 quod quidem numerum 999 longè excedit. Eadem ratione ad aliam quamlibet numerorum ſeriem progrediendo facilè intelligitur præſcripta numerorum diviſio in extrahenda radice quadrata & hinc

huic numerorum diviſioni partium numerum in radice reſpondere evidens eſt. Idem ſimili ratiocinatione conſtat pro radice cubica. Evidens eſt extractionem radicum ſimili ratione perfici in numeris fractis, extrahendo ſcilicet radicem propoſitam ex numeratore & ex denominatore. In qualibet autem radicum extractione, operationis ritè peractæ facilè habetur argumentum. Si radix ſit quadrata, hæc in ſe ipſam ducatur productoque addatur reſiduum, ſi aliquod fuerit facta operatione, reſtitui debet ipſe numerus propoſitus. Similitèr radix cubica ad cubum evehatur; id verò ſtatìm patet ex ipſa earumdem operationum natura.

IV. Sæpe ab extrahenda radice ſuperſedemus ubi veram invenire non licet, & quantitati propoſitæ præfigitur ſignum $\sqrt{}$ quod *radicale* appellant. Sic $\sqrt{3}$ ſignificat radicem quadratam numeri 3. $\sqrt[3]{10}$, denotat radicem cubicam denarii; & hi ſunt numeri quos arithmetici vocant numeros *ſurdos*, ſive *irrationales*, aut etiam *incommenſurabiles*. Quantitatibus litteralibus idem ſignum præfigitur; ita $\sqrt{ab}$, $\sqrt[3]{abc}$, ſignificant radicem quadratam ipſiùs, ab, & radicem cubicam quantitatis abc. Sed commoditatis ergò radix ſecunda

canda vel quadrata exprimi ſolet per $\frac{1}{2}$, radix cubica per $\frac{1}{3}$, ita $a^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{1}{3}}$, $a^{\frac{1}{m}}$, ſignificant radicem quadratam, cubicam, & radicem quamlibet indeterminatam, m. Ut autem clara talium expreſſionum notio habeatur, meminiſſe oportet quæ anteà de exponentibus breviter dicta ſunt. Ponamus $a = b^2$, erit $a^{\frac{1}{2}} = (bb)^{\frac{1}{2}}$. Præterea in quantitate $(bb)^3$, exponens, 3, indicat quantitatem, bb, ter ſcribendam eſſe, ac proinde $(bb)^3 = b^6$. Igitur eadem ratione in quantitate $(bb)^{\frac{1}{2}}$, exponens $\frac{1}{2}$ deſignat litteram, b, dimidio minùs ſumendam eſſe quam in bb, ac proindè ſemel tantùm, quarè $(bb)^{\frac{1}{2}} = b = a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$.
Idem patet de aliis quibuſcumque exponentibus. Res autem tota magis ac magis illuſtrabitur, explicatis quatuor arithmeticæ operationibus in quantitatibus ſurdis.

Quantitates ſurdæ adduntur vel ſubtrahuntur facillimè, ſi ejuſdem ſint exponentis & eadem habeant ſub ſigno radicali quantitatem. Si autem res non ita ſe habeat, ſæpiſſimè contingit quantitates ſurdas

das ejuſdem ordinis ad eandem quantitatem ſub ſigno radicali poſſe revocari. Ita ſi addi vel ſubtrahi debeant quantitates radicales $\sqrt{48abb}$, & b $\sqrt{75a}$, prima per reductionem mutatur in 4b $\sqrt{3a}$, altera autem in 5b $\sqrt{3a}$. Quare in 1°. caſu habebitur 9b $\sqrt{3a}$, in altero autem b $\sqrt{3a}$. Totum reductionis artificium in eo conſiſtit ut numeri ſub ſigno radicali poſiti quærantur diviſores inter quos ille eligatur, ſi quis fuerit, ex quo liceat radicem extrahere ejuſdem ordinis cujus eſt ſurda quantitas. Si aliquem ejuſmodi diviſorem invenias, ejus radicem præfige ſigno radicali quo includatur tantummodo alter dati numeri coefficiens. Si autem nullus talis diviſor inveniri poſſit, jam quantitates radicales in additione ſigno + connectendæ, in ſubtractione autem ſigno — ſeparandæ.

Demùm multiplicantur & dividuntur quantitates irrationales non ſecùs ac rationales & producto vel quoto idem quod priùs erat ſignum radicale præfigitur, quod quidem in utraque quantitate ſit ejuſdem ordinis. Ita ſi multiplicari debeant $\sqrt{ab} \times \sqrt{ac}$, productum erit $\sqrt{aabc} = a\sqrt{bc}$. Ita ſi dividi debeat ac $\sqrt{bc}$ per a $\sqrt{b}$ erit

$\sqrt{b}$ erit $\frac{ac\sqrt{bc}}{a\sqrt{b}} = \sqrt{c}$. Patet autem in multiplicatione delendum eſſe ſignum radicale, ſi æquales fuerint quantitates ſigno incluſæ; ſic $\sqrt{a^3c} \times \sqrt{a^3c} = a^3c$. Quoniam ſæpe contingit quantitates radicales ad eundem exponentem reducendas eſſe, obſervandum eſt id facilè præſtari poſſe ex hactenùs demonſtratis; ita quantitates duæ radicales $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$, & $\sqrt[m]{\frac{c}{d}}$ mutantur in $\sqrt[nm]{\frac{a^n}{b^n}}$ & $\sqrt[nm]{\frac{a}{d^n}}$; quod patet; nam quantitates illæ adpoteſtates n, m, reſpectivè evehuntur & ſimul deprimuntur. Probè autem notandum eſt diſcrimen inter quantitatum multiplicationem illarumque poteſtatem. Ita ſi multiplicari debeat a^3 per a^2 productum fit $a^{3+2} = a^5$. Si autem quantitas a^3 ad ſecundam poteſtatem evehi debeat, habetur $a^{3\times 2} = a^6$, & generatim quantitas a^m ad poteſtatem, n, evecta fit a^{mn}. Quarè multiplicatio fit per *indicis* additionem, poteſtas autem per multiplicationem. Contraria ratione diviſio fit per *exponentis* ſubtractionem, & radicis extractio per exponentis diviſionem. Ita $\frac{a^6}{a^2} = a^{6-2} = a^4$. At ſi ex a^6 ex-

trahenda ſit radix quadrata, erit $a^{\frac{6}{2}} = a^3$. & generatim pro diviſione $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ at pro radicis, n, extractione habetur $a^{\frac{m}{n}}$. Si quantitates ſint ſimplices, breviùs per exponentes quam per ſignum radicale exprimuntur.

V. Quantitates irrationales ſivè incommenſurabiles ſæpè in hoc capite nominavimus, revera autem tales dari quantitates evidens eſt ex capite præcedenti in quo demonſtravimus fractionem ſivè puram ſivè mixtam in fractionem ſemper abire, etiamſi ad poteſtatem quamlibet evehatur. Ergò numerus integer cujus radix quadrata, cubica &c. non eſt numerus integer, nullam fractionem nequidem mixtam pro radice habere poteſt, ac proindè hujus numeri radix eſt incommenſurabilis. Itaque numeri incommenſurabiles non ſunt numeri propriè dicti. Et requidem ipſa, cum per numerum nihil aliud intelligamus quam rationem quantitatis cujuſvis ad aliam ejuſdem generis quantitatem, in omni ratione vel numero exiſtere neceſſum eſt partem aliquotam quæ ſit utrique quantitati communis; at quantitates inter ſe incommenſurabiles tali carent menſura; ità $\sqrt{2}$ non eſt numerus propriè dictus, talis quantitas

titas propriè non exiſtit eaque inveniri non poteſt. Imò fractiones propriè non dicuntur numeri niſi quatenus ad numeros integros revocantur. Et quidem fractio $\frac{1}{4}$ quæ exprimit quartam partem totius alicujus ter ſumptam, ipſa ad numeros integros refertur; hæc enim quarta pars velut alia unitas conſideratur, ut anteà obſervavimus. Totam incommenſurabilium doctrinam utiliſſimam quidem, alio arithmetico exemplo illuſtrabimus. Si ex numero, 7, extrabenda proponatur radix quadrata, hæc invenitur minor quam 3; cum $3 \times 3 = 9$ & major quam 2, cum ſit $2 \times 2 = 4$. Igitur radix quadrata numeri, 7, continetur intra limites 2 & 3, ac proindè ſi poſſet determinari, ea foret æqualis numero, 2, & alicui numero fracto, ſed fieri non poteſt ut fractio mixta per ſeipſam multiplicata producat numerum integrum, ut anteà demonſtravimus. Ergò numerus, 7, pro radice habere non poteſt neque numerum integrum neque fractum. Idem patet de alio quolibet numero integro cujus radix non eſt numerus integer.

Schol. Secundæ duntaxat & tertiæ poteſtatis compoſitionem ac reſolutionem in præſenti capite explicavimus; at rem generatim & breviter quantùm licet, pro

 alia

alia qualibet dignitate conſiderabimus. Ex hactenus explicatis manifeſtum eſt eodem modo formari altiores cujuslibet gradus poteſtates. Ita ad formandam quarti gradus poteſtatem multiplicari debet cubus per ſuam radicem & sic deinceps. Jam in ſingulis terminis exponentes & coefficientes diligenter obſervemus. In poteſtatis cujuslibet compoſitione, primus terminus, a, binomii cujuslibet, $a + b$, evehitur ad poteſtatem quæſitam V.G. a^2 ſi poteſtas ſecunda fuerit. In aliis ſequentibus terminis exponens quantitatis, a, per unitatem decreſcit & in ultimò termino evaneſcit. Ita in ſecunda poteſtate habetur $2ab + b^2$. Contra autem poteſtas termini, b, in primo termino non reperitur, ſed in 2°. termino illius exponens eſt unitas, in 3°. termino eſt 2, & ita creſcit per gradus donec in ultimo termino exponenti poteſtatis quæſitæ æqualis fiat. Quare iiſdem gradibus quibus decreſcunt exponentes ipſius, a, creſcunt exponentes quantitatis, b, atque in utraque quantitate exponentium ſumma ſemper eadem eſt, & poteſtatis quæſitæ exponenti æqualis; quod quidem in poteſtate qualibet experiri licet. Ita poteſtas 6ª binomii $a + b$, invenitur $a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$, in qua obſervare eſt expo-

exponeotes quantitatis , a , decreſcere ſecundum ſeriem oumerorum 6 , 5 , 4 , 3 , 2 , 1 , 0 ; cootrario autem ordioe creſcere exponeotes quantitatis , b , nempè hoc modo 0 , 1 , 2 , 3 , 4 5 , 6 ; ſummaqoe exponentium io utroque termino eſt ſemper 6. Jam ſupereſt ut ſingulorum termioorum coefficientes obſervemus. Dividatnr coefficiens præcedeotis termini per expooentem ipſius , b , in termino dato & quotum multiplica per exponentem ipſius , a , io eodem termino , auctum unitate. Ita in præcedenti exemplo ubi termini ſuot , a^6, a^5b , a^4b^2 , a^3b^3 , a^2b^4 , ab^5 , b^6 , coefficiens primi termini eſt unitas , coefficiens ſecundi eſt $\frac{1}{1} \times \overline{5+1} = 6$, tertii termini coefficiens $\frac{6}{2} \times \overline{4+1} = 3 \times 5 = 15$. Coefficiens termini quarti eſt $\frac{15}{3} \times \overline{3+1} = 5 \times 4 = 20$. Et ſimili modo inveoientur coefficieotes alii 15 , 6 , 1.

Ex hac conſtanti exponeotium & coefficientium ſerie , generatim exhiberi poteſt binomium a + b , ad poteſtatem quamlibet , m , evectum. Ita terminorum ſeries ſe habebit , noo conſideratis coefficientibus , a^m, $a^{m-1}b$, $a^{m-2}b^2$, $a^{m-3}b^3$, $a^{m-4}b^4$, quæ ſeries continuari debet , donec exponens quaotitatis , b , evadat m. Coefficientes autem ex præcedenti regula hoc

ordine progredientur 1, m, $m \times \frac{m-1}{2}$, $m \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3}$, $\frac{m \times m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} \times \frac{m-3}{4}$ & ita deinceps. Quare hæc habetur generalis formula $\overline{a + b}^{m} = a^{m} + m a^{m-1} b + m \times \frac{m-1}{2} \times a^{m-2} b^{2} \times m \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} \times a^{m-3} b^{3}$ &c. Simili modo invenitur formula pro binomio $\overline{a - b}^{m}$, hoc ſolùm obſervato diſcrimine quod terminus debeat eſſe negativus, ſi exponens quantitatis, b, ſit numerus impar. Ita in cubo $a^{3} - 3a^{2}b + 3ab^{2} - b^{3}$, ſecundus & quartus termini ſunt negativi; ratio autem eſt evidens, cum negativa exiſtente quantitate multiplicationum numerus impar productum efficere debeat negativum. Formula eadem omninò ratione componi poſſet pro trinomio $a + b + c$, ponendo $a + b = a$, & ita deinceps pro polynomio quolibet. Præcedens formula quæ poteſtatum compoſitionem exhibet, earum quoque reſolutionem repræſentare poteſt. Ita radix quadrata binomii, $a + b$, nihil eſt aliud quam poteſtas binomii $a + b$, cujus exponens $\frac{1}{2}$. Quarè ponatur in formula præcedenti $m = \frac{1}{2}$, habebiturque $\overline{a + b}^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \times a^{-\frac{1}{2}} b + \frac{1}{2} \times - \frac{1}{4} \times a^{-\frac{3}{2}} b^{2} +$ &c. $= a^{\frac{1}{2}} + \frac{b}{2a^{\frac{1}{2}}} - \frac{b^{2}}{8a^{\frac{3}{2}}} +$ &c. Si quantitas ex pluribus quam duobus

bus conſtet terminis E. G ſi extrahenda ſit radix quadrata ex quantitate $1 + 2c + c^2$. Fiat $a = 1$, $b = 2c + c^2$. Eadem adhibita formula, factiſque debitis reductionibus per vulgares algebræ regulas, invenitur radix $1 + c$, ut oportet. Si autem quantitas propoſita nullam habeat radicem accuratam, hujus formulæ ope ad radicem proximè veram licet accedere. Exempla duo breviter proponemus. Sit $aa + b$, quadratum imperfectum ex quo extrahenda ſit radix quadrata, habebitur $(aa + b)^{\frac{1}{2}} = aa^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \times b \times aa^{\frac{1}{2}-1} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}-1 \times \frac{b^2 \cdot aa^{\frac{1}{2}-2}}{2}$ &c. $= a + \frac{b}{2a} - \frac{bb}{8a^3}$ &c. Simili modo ſi ex cubo imperfecto $a^3 + b$ extrahenda ſit radix cubica, erit $(a^3 + b)^{\frac{1}{3}} = a + \frac{b}{3a^{2}} - \frac{b^2}{9a^5}$, &c. Itaque ad radicem proximè veram accedere poſſumus per ſeries infinitas, dummodò ſeries illæ ſint *convergentes*, hoc eſt, ſi termini perpetuò decreſcant. Sit, n, ordo quem terminus aliquis in præcedenti ſerie occupat, terminus ille invenietur eſſe ad terminum proximè ſequentem ut 1 ad $\frac{b}{a} \times \frac{m-n+1}{n}$, ac proindè ut ſeries ſit con-

vergens, oportet $b \times (m-n+1)$ eſſe ſemper minorem quam, na. Ita in exemplo propoſito, ad habendam radicem quadratam proximè accuratam, terminus $b \times (\frac{1}{2} n^2 1)$ poſitivè ſumptus, minor eſſe debet quam naa, exiſtente, n, numero integro. Simili modo ad habendam radicem cubicam quam proximè in exemplo præcedenti, oportet terminum $b \times (\frac{2}{3} - n + 1)$ poſitivè ſumptum ſemper minorem eſſe quam na^3; quod quidem diligenter obſervandum eſt in præcedentis formulæ uſu.

CAPUT VI.

De proportionibus.

I.

IN memoriam revocanda eſt explicata cap. 1°. rationis & proportionis definitio. *Ratio* dicitur ea duarum quantitatum *habitudo* qua ad ſe invicem referuntur; *geometrica* dicitur ſi in ea relatione conſideremus quomodo quantitas una alteram contineat; *arithmetica* vocatur, ſi exceſſum tantummodo unius ſupra aliam ſpectemus. In omni ratione quantitas quæ ad aliam refertur, *antecedens* dicitur, ea verò ad quam refertur, *conſequens* appellatur. Ratio geometrica dicitur *dupla*, *tripla*, *decupla* &c., ſi antecedens bis, ter, decies &c. conſequentem continet; contrà verò

verò *ſubdupla*, *ſubtripla*, *ſubdecupla* &c., ſi bis, ter, decies &c. antecedens in conſequenti continetur. *Exponens* rationis geometricæ dicitur quotus ex antecedenti per conſequentem diviſo; exponens verò rationis arithmeticæ eſt differentia conſequentis ab antecedenti. Hinc ratio geometrica ad inſtar fractionis ſcribitur, arithmetica ad inſtar ſubtractionis. Duarum rationum æqualitas *proportio* dicitur, *geometrica* vel *arithmetica* pro rationum ipſarum qualitate; igitur in omni proportione quatuor quantitates eſſe debent, & *prima ad ſecundam eſſe* dicitur *ut tertia ad quartam*. Si verò eadem quantitas bis aſſumatur, ita ut primæ rationis conſequens idem ſit cum antecedente, proportio dicitur *continua*. Ita exprimi ſolet proportio geometrica $a . b :: c . d$, vel $a : b = c : d$, vel $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; arithmetica verò $a - b = c - d$.

II. Si inter duas primas quantitates eadem ſit differentia quæ inter duas ultimas, jam quantitates illæ ſunt *arithmeticè proportionales*, ut patet ex præcedenti definitione; quarè arithmeticè proportionales ſunt numeri 3, 7, 12, 16; atque etiam quantitates a, $a + b$, e, $e + b$. Si autem talis proportio continuetur ita ut quan-

quantitates per eandem conſtantem differentiam perpetuò creſcant vel decreſcant, jam habetur ſeries vel *progreſſio arithmetica*, qualis eſt iſta a, a + b, a + 2b, a + 3b &c., vel hæc alia x, x—b, x—2b &c. aut etiam in numeris 1, 2, 3, 4, 5 &c., & 10, 4, 1, — 2 — 5 — 8 &c. Ex ipſa proportionis arithmeticæ natura evidens eſt ſummam extremorum terminorum æqualem eſſe ſummæ mediorum. Ita in proportione arithmetica e, a + b, e, e + b, manifeſtum eſt ſummam extremorum a + e + b, æqualem eſſe ſummæ mediorum a + b + e. Hinc datis tribus quantitatibus facilè invenitur quarta arithmeticè proportionalis; addantur ſcilicet ſecunda & tertia atque ex ſumma auferatur prima, differentia erit quartus terminus arithmeticè proportionalis, ut patet.

Inde etiam colligitur in progreſſione qualibet arithmetica ſummam duorum extremorum æqualem eſſe ſummæ duorum quorumlibet terminorum ab extremis æquè diſtantium. Sint priores termini, a, a + b, a + 2b &c., ſitque ultimus terminus, x, erit penultimus x—b, antepenultimus x—2b &c. Jam comparentur inter ſe termini qui ab extremis æquè diſtant in hunc modum

a, a

$a, a+h, a+2h, a+3b, a+4b$ &c.
$\underline{x, x-b, x-2b, x-3b, x-4h}$ &c.
$a+x, a+x, a+x, a+x, a+x$ &c.

Si nempè ſinguli termini correſpondentes, & qui ab extremis æqualiter diſtant ſibi invicem addantur, habebitur ſemper $a+x$, hoc eſt, ſumma primi termini, a, & ultimi x; atque hinc etiam evidens eſt ſummam omnium terminorum in progreſſione arithmetica æqualem eſſe producto ex ſumma primi & ultimi in dimidium terminorum numerum. Ita ſi numerus terminorum dicatur, n, erit omnium ſumma $\overline{a+x}\times\frac{n}{2}$.

III. Cum differentia communis terminorum in progreſſione arithmetica primum terminum non afficiat, patet hujus differentiæ coefficientem in quolibet dato termino æqualem eſſe numero terminorum, qui terminum datum præcedunt. Quarè in ultimo termino, x, habebitur $\overline{n-1}\times b$, nempè $x=a+\overline{n-1}\times b$. Igitur cum omnium terminorum ſumma ſit $\overline{a+x}\times\frac{n}{2}$, ea quoque invenitur $=\frac{2an+n^2b-nb}{2}=\left(a+\frac{nb-b}{2}\right)\times n$. E. G. Series arithmetica $1+2+3+4+5$ &c. ad 100 terminos producta $=\frac{2\times100+10000\ 100}{2}=5050$.

5050. At ſi progreſſionis primus terminus fuerit, o, erit progreſſionis ſumma æqualis dimidio producto ex ultimo termino in numerum terminorum. Nam in hoc caſu cum ſit $a = 0$, ſumma terminorum quæ generatim exprimitur per $\overline{a + x} \times \frac{n}{2}$ in hanc abit $\frac{nx}{2}$. Unde evideus eſt ſummam numeri cujuslibet terminornm in progreſſione arithmetica cujus primus terminus eſt, o, æqualem eſſe dimidio producto ex terminorum numero in terminum maximum. E. G. Progreſſio arithmetica

$$0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = \frac{9 + 9 + 9 + 9 + 9 + 9 + 9 + 9 + 9 + 9}{2} = \frac{10 \times 9}{2} = 45.$$

IV. Si quotus ex duabus primis quantitatibus æqualis ſit quoto ex duabus ultimis, quatuor illæ quantitates ſunt *geometricè proportionales*, ut patet ex præcedenti definitione. Tales ſunt numeri 2, 6, 4, 12, & quantitates a, ar, b, br. Ex ipſa proportionis geometricæ natura evidens eſt productum ex terminis extremis æquale eſſe producto ex mediis; ſic $a \times br = ar \times b$, ut patet. Quarè datis tribus terminis facilè invenitur quartus geo-

geometricè proportionalis, multiplicando ſcilicet duos medios terminos productumque dividendo per primum, quotus erit quartus terminus quæſitus; ita datis tribus quantitatibus, a, ar, br, invenitur quarta $\frac{ar \times b}{a} = br$. At ſi proportio ſit continua, ita ut ſecunda quantitas ſit primæ rationis conſequens & ſimul ſecundæ rationis antecedens, ſimili ratiocinatione patet ſumendum eſſe hujus quantitatis quadratum illudque per primam quantitatem eſſe dividendum. Hæc autem quantitas quæ antecedentis & conſequentis vices gerit, vocatur *media proportionalis*, taliſque proportio ita exprimi ſolet ∺ a. b. c, nempè hoc ſcribendi modo ſignificatur, b, eſſe mediam proportionalem. At media proportionalis arithmetica ita deſignatur ÷ a, b. c. patet autem in hac proportione ſummam extremorum æqualem eſſe termino medio bis ſumpto.

Ex demonſtratis de proportione geometrica pendet vulgariſſima arithmeticæ operatio quæ *regula trium*, vel etiam *regula aurea* propter eximiam utilitatem appellari ſolet; per hanc regulam datis tribus terminis invenitur quartus proportionalis. In hac autem operatione probè obſervari debet terminorum ordo. Et primò quidem con-

conſideranda eſt quantitas quæ eſt ejuſdem generis cum quantitate quæſita. Ex quæſtionis natura intelligitur an quantitas data ſit major vel minor quantitate quæſita; ſi major ſit, jam maxima ex aliis duabus quantitatibus in terminorum ordine ad ſiniſtram ſcribi debet; at ſi minor ſit, tunc duarum aliarum quantitatum minima ad ſiniſtram, alia autem ad dextram collocari debet. Conſtituto autem convenienti terminorum ordine, jam ex præſcripto regulæ, productum ex ſecundo termino in tertium per primum terminum dividi debet. Tota res exemplo perſpicua fiet. Hæc proponatur quæſtio. Si triginta operarii dierum 12 ſpatio opus aliquod abſolvant, quæritur neceſſarius operariorum numerus ut idem opus 18 diebus abſolvatur. Quoniam quæritur operariorum numerus, primùm conſiderandus eſt numerus 30; ſtatìm autem vides numerum illum datum majorem eſſe numero quæſito; quarè numerus 18 ad ſiniſtram collocari debet, numerus autem 12 ad dexteram, atque ita operatio peragitur, hoc ordine

$$18 : 30 = 12 : \frac{30 \times 12}{18} = 20.$$

V. Pro varia terminorum ordinatione in proportione geometrica, diverſa ab arithmeticis inventa fuerunt nomina. At ex pri-

prima terminorum ordinatione, aliæ omnes facilè inferuntur. Si primus terminus dicatur eſſe ad tertium ut ſecundus ad quartum, argumentari dicimur: *alternando*. Si dicatur ſecundus ad primum ut quartus ad tertium, tunc dicitur *invertendo*. Si ſumma terminorum primi & ſecundi refertur ad ſecundum ut ſumma terminorum tertii & quarti ad quartum, inferre dicimur *componendo*; contra autem *dividendo*, ſi terminorum primi & ſecundi differentia ad ſecundum referatur ut differentia tertii & quarti refertur ad quartum. In his autem omnibus argumentandi modis proportionem manere patet, cum productum extremorum æquale ſemper inveniatur producto mediorum. Ex eadem productorum æqualitate facilè colligitur, rationum compoſitione proportionem non mutari. Ratio *compoſita* ex pluribus geometricis rationibus illa dicitur quam habet productum ex earum antecedentibus ad productum ex conſequentibus. Sint duæ proportiones $a : b = c : d$, erit $af : bg = cm : ds$.

$$f : g = m : s$$

Etenim productum extremorum $afds$ æquale eſt producto mediorum $bgcm$. Et quidem $a : b = c : d$, ac proindè $ad = bc$. Prætereà $f : g = m : s$, ideòque $fs = gm$, ergò $ad \times fs = bc \times gm$. Simili ratione patet

patet $\frac{ad}{fs} = \frac{bc}{gm}$; Atque eadem valet demonſtratio pro alio quolibet proportionum numero; ratio ex duabus æqualibus compoſita dicitur *duplicata*, ex tribus *triplicata* &c. Hinc ratio geometrica quam habet quadratum unius quantitatis ad quadratum alterius eſt duplicata ejus quam habent ipſæ quantitates ad invicem, ratio cuborum triplicata &c. Et contrà ratio quam habent inter ſe radices quadratæ, cubicæ &c. dicitur *ſubduplicata*, *ſubtriplicata* &c. rationis potentiarum *reſpectivarum*. At ratio quæ intercedit inter radices quadratas cuborum, hoc eſt, ratio $a^{\frac{3}{2}}$ & $b^{\frac{3}{2}}$ dicitur *ſeſquiplicata*.

Si duæ quantitates ita inter ſe connexæ ſint ut ſi una dupla, tripla &c., altera etiam dupla, tripla &c. evadat, prima dicitur eſſe in *ratione directa ſimplici* alterius. At ſi prima in eadem ratione decreſcit in qua altera augetur, tunc illa eſſe dicitur in *ratione inverſa*, ſivè *reciproca* iſtius. At ſi duæ quantitates ita ſint invicem connexæ ut altera creſcat in eadem ratione qua primæ quadratum aut cubus &c. tunc illa ad hanc eſſe dicetur in ratione duplicata, triplicata &c. At ſi in eadem ratione una decreſcit qua creſcunt alterius quadrata vel cubi, dicetur eſſe in ratione hujus

hujus *reciproca* duplicata aut triplicata &c. Harum rationum frequentiſſimus uſus recurret in Phyſica.

VI Ex mediorum & extremorum producto pendet etiam univerſa progreſſionum geometricarum doctrina. In progreſſione qualibet geometrica productum ex primo in ultimum terminum ſemper æquale eſt producto ex ſecundo & penultimo, aut etiam alteri cuilibet producto ex duobus terminis a primo & ultimo æqualiter diſtantibus. Sit progreſſio a, ar, ar², ar³, in qua communis multiplicator aut diviſor *ratio communis* dici ſolet, ſitque, y, ultimus terminus, erunt quatuor ultimi termini y, $\frac{y}{r}$, $\frac{y}{r^2}$, $\frac{y}{r^3}$, ut patet ex natura progreſſionis geometricæ. Eſt autem a $\times$ y $= ar \times \frac{y}{r} = ar^2 \times \frac{y}{r^2} = \frac{ar^3 \times y}{r^3}$ &c. Præterea ſumma progreſſionis geometricæ, dempto primo termino, æqualis eſt ſummæ omnium terminorum, dempto ultimo per communem rationem multiplicato. Nam $ar + ar^2 + ar^3 +$ &c. $+ \frac{y}{r^3} + \frac{y}{r^2} + \frac{y}{r} + y = r \times a + ar + ar^2$ &c. $+ \frac{y}{r^4} + \frac{y}{r^3} + \frac{y}{r^2} + \frac{y}{r}$. Quare ſi progreſſionis ſum-

ma dicatur s erit $s - a = \overline{s - y} \times r$, hoc eſt, $s - a = sr - yr$, vel $sr - s = yr - a$, & $s = \frac{yr - a}{r - 1}$. Quamvis autem ex arithmeticarum operationum natura facilè pateat qua ratione ad hunc ultimum valorem perveniatur, res tamen magis fiet manifeſta ex appendice quam de æquationibus mox adjungemus. Porrò cum exponens ipſius, r, ab ipſo ſecundo termino perpetuò creſcat, ſi numerus terminorum dicatur, n, erit n-1 exponens ipſius r, in ultimo termino, ac proinde $y = ar^{n-1}$, & $yr = ar^{n-1+1} = ar^{n}$, & $s = \frac{yr - a}{r - 1} = \frac{ar^{n} - a}{r - 1}$. Quare datis in progreſſione geometrica primo termino, terminorum numero & communi ratione, facilè invenietur omnium terminorum ſumma. Si invenienda ſit ſumma ſerici decreſcentis $y + \frac{y}{r} + \frac{y}{r^2} + \frac{y}{r^3}$ &c. $+ ar^3 + ar^2 + ar + a$, poſito terminorum numero infinito, ultimus terminus, a, ſit $= 0$. Cum enim, n, ſit infinitus ac proindè & infinitus r^{n-1}, erit $a = \frac{r}{r^{n-1}} = 0$. Quare ſumma talis ſerici $s = \frac{yr}{r - 1}$, quæ eſt ſumma finita, quamvis numerus

merus terminorum ſit infinitus; ita ſeries infinita $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} +$ &c. $= 2$.

Scol. Ad progreſſiones arithmeticas & geometricas refertur logarithmorum doctrina, maximæ quidem utilitatis in phyſica ſublimiori, ſed rem breviter attingere nobis ſatis erit. Progreſſio quælibet geometrica hac formula poteſt repræſentari $\div\div$ $aq^0 . aq^1 . aq^2 . aq^3 . aq^4 . aq^5$ &c. in qua, a, & q, exprimunt numeros quoslibet. Quarè ſi fiat $a = 1$, præcedens ſeries abit in hanc $\div\div q^0 . q^1 . q^2 . q^3 . q^4 . q^5$ &c. Indè autem duo colliguntur, 1°. Productum ex duobus quibuſcumque hujus progreſſionis terminis, pro exponente habet ipſorum exponentium ſummam. Ita productum ex $q^3 \times q^4 = q^7$. Quarè ſi inveniendus proponatur in hac progreſſione terminus qui ſit duorum aliorum producto æqualis, quæratur terminus cujus exponens eſt ipſa duorum exponentium ſumma ... 2°. Quotus ex duobus terminis emergens, ipſe eſt terminus cujus exponens eſt ipſa exponentium differentia. Ita ſi dividatur q^8 per q^3, quotus eſt q^{8-3}. Quarè ſi inveniendus proponatur terminus, duorum aliorum quoto æqualis, quæratur terminus cujus exponens æqualis eſt exponentium differentiæ.

Numeri alicujus *Logarithmus* appellatur exponens poteſtatis numeri denarii qui ſit

numero dato æqualis. Ita ſi habeatur progreſſio geometrica $\div 10^0 . 10^1 . 10^2 . 10^3 . 10^4$ &c., & infrà ſcribantur eorumdem terminorum valores $\div 1 . 10 . 100 . 1000 . 10000$ &c., exponens 0, eſt logarithmus unitatis, exponens, 1, eſt logarithmus numeri 10 & ità deinceps. Sed quia exponentes illi exhibent duntaxat logarithmos numerorum integrorum in progreſſione decupla 1, 10, 100, 1000 &c., neceſſum eſt prætereà haberi logarithmos numerorum intermediorum 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13 &c.; quarè exponentibus præcedentibus additæ fuerunt decimales ſeptem hoc modo. $\div 10^{0,0000000} . 10^{1,0000000} . 10^{2,0000000} , 10^{3,0000000}$ &c. Jam verò quia exponentes illi ſemper ſunt in progreſſione arithmetica, ex dictis evidens eſt valores numeri denarii ad illas poteſtates evecti quarum indices ſunt iidem exponentes, perpetuò manere in progreſſione geometrica atque eoſdem exponentes eſſe horum numerorum logarithmos. Quare ſi continuò augeantur decimales illæ fractione $\frac{1}{10000000}$ vel, quod idem eſt, ſi inter ſingulas primæ progreſſionis exponentes inſerantur termini medii arithmeticè proportionales

les 9999999, babetur nova progreſſio geometrica hoc modo $\div 10^{0.0000000} . 10^{0.0000001} . 10^{0.0000002} . 10^{0.0000003}$ &c, in qua quidem progreſſione obſervandum eſt numeros lentiſſimè creſcere, cum 1us terminus ſit 1, & 1000000 01us ſit 10. Erit ergò terminus aliquis intermedius = 2, vel 3 vel 4 &c. Ita, 2, inventus eſt = termino $10^{0.301030}$; $3 = 10^{0.4771213}$; $4 = 10^{0.6020600}$. Quare exponentes illi ſunt logarithml numerorum 2, 3, 4 &c. Ex his principiis pendent vulgarium logarithmorum tabulæ ab, 1, nſque ad 100000; hæ autem majoribus numeris inveniendis inſerviunt. Aliquæ accuratiores tabulæ logarithmos exhibent ex decem imò & quindecim decimalibus conſtantes; ſed ut plurimum ſeptem ſufficiunt, atque etiam quinque primæ decimales duntaxat aliquandò adhiberi ſolent. Ex bactenus demonſtratis & ex logarithmorum tabulis evidens eſt logaritbmos numerorum inter 1 & 10 incipere a, 0; logarithmos numerorum inter 10 & 100 incipere ab 1, logarithmos numerorum inter 100 & 1000 incipere a, 2; & ita deinceps. Primus ille terminus qui eſt integer numerus exponentis

nentis dici ſolet logarithmi *caracteriſtica*, quo nomine appellatus fuit, quia indicat quot notas contineat numerus dato logarithmo reſpondens. Manifeſtum enim eſt numerum illum tot notas continere quot unitates habet caracteriſtica unitate auctas. Ita logarithmo 4, 8145605 reſpondet numerus quinque conſtans notis, cum caracteriſtica ſit 4.

Commodiſſimæ ſanè ſunt logarithmorum tabulæ; Etenim cum demonſtratum ſit productum ex duobus numeris logarithmorum ſummæ reſpondere, eorum verò differentiæ reſpondere numerorum quotum, per ſolam additionem & ſubtractionem compendioſè abſolvi poſſunt multiplicatio & diviſio. Sumantur datorum numerorum logarithmi ſimulque addantur, numerus ſummæ reſpondens in logarithmorum tabulis erit producti logarithmus; contrà autem logarithmorum differentia erit logarithmus quoti, ac proindè inveniuntur numeri quæſiti. Simili ratione patet numerum quemlibet ad datam poteſtatem evehi, ſi toties ſumatur numeri dati logarithmus, quoties per ſeipſum numerus multiplicandus proponitur, hoc eſt, logarithmus per exponentem poteſtatis multiplicari debet, & productum erit quæ-

ſiti

ſiti numeri logarithmus; contrà autem ſi numeri dati logarithmus, per exponentem radicis dividatur, quotus erit quæſitæ radicis logarithmus. Quamvis autem eam duntaxat explicaverim logarithmorum formam in qua logarithmus unitatis conſtituitur, o, multipliciter tamen variari poſſunt logarithmi. Etenim ſi duæ ſint progreſſiones quarum altera geometrica ſit, altera arithmetica & ſub ſingulis primæ terminis ſinguli ſecundæ ſcribantur, undecumque initium fiat, hi dicuntur illorum logarithmi. Sic termini progreſſionis inferioris ſunt logarithmi ſuperioris

$\frac{1}{16} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 16 \cdot 32$ &c.

$-4 \cdot -2 \cdot 0 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 14$ &c.

Semel autem conſtituta progreſſione geometrica cum ſuis logarithmis, utramque ſeriem licebit interjectis quotcumque terminis augere; Si inter duos quoslibet progreſſionis geometricæ terminos medium geometricè proportionale, & inter duos eorum logarithmos medium arithmeticè proportionale conſtituas. Sic inter 2 & 4 medium proportionale eſt $\sqrt{2 \times 4} = \sqrt{8} = 2.289$ &c., cujus logarithmus eſt $\frac{6+8}{2} = 7$. Et eadem methodo

thodo ſemper inveniri poterunt infiniti alii logarithmi numerorum qui vel integri ſint, vel ex integris & fractis compoſiti, medios terminos inter duos proximos ſemper inquirendo. Aliud exemplum in vulgaribus logarithmorum tabulis proponemus. Ut haberetur Log. 9. quæſitus eſt medius proportionalis inter 1 & 10, ſive inter 1.0000000 & 10.0000000, extrahendo ex 10.0 &c. radicem quadratam veræ proximam 3.1622777, cujus logarithmus eſt dimidius Log 10. Et iſte quidem numerus major eſt aliquantò quam 3, ſed longè diſtat a 9. Itaque inter eum & 10.0 &c. iterùm quæſitus eſt medius proportionalis extrahendo radicem numeri qui oritur ducendo 10.00 &c. in 3.16 &c. & inventa eſt radix veræ quam proxima 5.6234132. Hic numerus paulò major eſt quam 5 & ejus logarithmus habetur ſi ſumma logarithmorum 10.00 &c. & 3.16 &c. bifariam dividatur. Sic continua inveſtigatione mediorum proportionalium inter duos numeros qui ſint proximè majores vel minores quam 9, devenitur tandèm ad numerum qui ne una quidem millioneſima differat a 9, ejuſque logarithmus numero 9 attribuitur. Hoc artificio & patientiſſimo multorum anno-

annorum labore ſupputatæ ſunt logarithmorum tabulæ. Cæterùm in tabulis ſupputandis, neceſſe non eſt eam quam demonſtravimus methodum adhibere niſi in numeris qui dicuntur *primi*. Nam in numeris qui ex aliorum multiplicatione producuntur, ſatis eſt logarithmos coefficientium addere, ut habeatur logarithmus producti. Sic Log. 15 = L. 3 + L. 5 & Log. 27 = Log. 3 + Log. 9.

APPENDIX

De Æquationibus.

I.

Æ*Quatio* dicitur propoſitio duarum quantitatum æqualitatem affirmans, interpoſito æqualitatis ſigno =. Æquatio valorem quantitatis alicujus repræſentat, ſi ex una æquationis parte habeatur quantitas ſola quæſita, in parte autem altera occurrant quantitates quæ omnes ſint cognitæ. Ita ſi habeatur $x = \frac{4 \times 6}{3} = 8$, notus eſt valor ipſius x. Itaque in omni reſolvenda æquatione id curandum eſt, ut nempè quantitas cujus valor quæritur in

una æquationis parte ſola contineatur, pars autem altera ſolas quantitates cognitas contineat. In hac autem appendice duplex duntaxat æquationum genus conſiderabimus, eas ſcilicet in quibus quantitas incognita vel unius eſt dimenſionis ſeu primi gradus, vel ad ſecundam dimenſionem ſeu ſecundum gradum evehitur. Quod primi gradus æquationes ſpectat, totum artificium regulis quibuſdam explicabimus variiſque numeris diſtinguemus.... 1°. Ex una æquationis parte in alteram transfertur quantitas aliqua, facta ſignorum permutatione, ut in hoc exemplo. $5x + 50 = 4x + 56$, $5x - 4x = 56 - 50$ & $x = 6$.... 2°. Si quantitas incognita quantitatibus aliis per multiplicationem aut diviſionem permixta ſit, ab iis liberari debet in primo caſu per diviſionem, in caſu altero per multiplicationem. Sit $3x + 12 = 27$, erit $3x = 27 - 12 = 15$ & $x = \frac{15}{3} = 5$. Sit autem $\frac{x}{5} + 4 = 10$, erit $x + 20 = 50$, & $x = 50 - 20 = 30$.... 3°. Proportio quælibet geometrica converti poteſt in æquationem, facta extremorum & mediorum multiplicatione. Sit $12x :$

$\frac{x}{2}$

$\frac{x}{2} = 4 : 1$, erit $12 - x = 2x$; quare $3x = 12$, &, $x = 4$. Simili ratione proportio arirbmerica iu æquationem per additionem mutari poteſt..... 4°. Loco quantitatis cujuslibet in æqnatione, alia ejuſdem valoris ſubſtitni poteſt. Sit $3x + y = 2y$ & $y = 9$, erit $3x + 9 = 24$, $x = \frac{24-9}{3} = 5$.....: 5°. Si pars æquationis quantitatem quæſitam continens, ſigno aliquo radicali afficiatur, delendum eſt ſignum radicale, & altera pars æquationis ad eam evehi debet poteſtatem quam indicat ipſum ſignum radicale. Sit $\sqrt{ax + b^2} - c = d$, erit $\sqrt{ax + b^2} = c + d$, & $ax + b^2 = d^2 + 2cd + c^2$, quarè $x = \frac{d^2 + 2cd + c^2 \cdot b^2.}{a}$

II. His præmiſſis permutationum regulis quæ ex anteà demonſtratis facilè intelliguntur, jam problema aliquod unius dimenſionis ſolvendum proponemus. Et primo quidem quæſtionis propoſitæ diſtincta habeatur notio & ſingulæ conditiones attentè conſiderentur. Si alicujus problematis conditiones ita exprimantur ut tot habeantur incognitæ quot æquationes, poterit

terit ſemper deveniri ad unicam æquationem quæ unicam incognitam habeat. Nam ſint. E G. 10 æquationes & totidem incognitæ, poterit conferendo primam cum ſecunda eliminari per regulas præſcriptas, una ex iis incognitis, inveniendo novam æquationem quæ illa careat; tùm idem præſtari poterit conferendo primam cum tertia & ita porrò, ac habebuntur jam novem æquationes cum novem incognitis, quæ eodem artificio ad octo reduci poterunt cum octo incognitis & ita porrò donec perveniatur ad unicam æquationem cum unica incognita. Hinc ſi habeantur tot æquationes quot incognitæ, problema dicitur *determinatum*, & unicam vel finitas numero ſolutiones admittit. Si fuerint plures incognitæ quam æquationes, problema dicitur *indeterminatum* & ſolutiones habet infinitas. Æquatio $3x + \frac{1}{4} x = 20$, eſt æquatio determinata; ſed $x + y = 12$, eſt indeterminata; etenim ſi ponatur $x = 1$ & $y = 11$ vel $x = 2$, & $y = 10$, & ità porrò, ſemper invenietur $x + y = 12$, ita ut infiniti ſint valores qui pro x & y poſiti numerum datum reſtituant. Regulas hactenùs explicatas ad facile exemplum transferamus. Mercator quidam num-

mos

mos quotannis triente adauget, demptis 100 nummis quos annuatim impendit in ſumptus, & poſt tres annos fit duplo ditior, quæruntur nummi. In hoc problemate plures latent conditiones sic evolvendæ & enuntiandæ. Quantitates incognitæ ultimis alphabeti litteris deſignari ſolent. Itaque mercator habet certam nummorum ſummam.

rum ſummam.	x
Anno primo expendit nummos 100. Ergò.	$x-100$
Reliquum adauget triente, quare	$x-100+\frac{x-100}{3}=\frac{4x-400}{3}$
anno ſecundo expendit nummos 100. Ergò.	$\frac{4x-400}{3}-100=\frac{4x-700}{3}$
Reliquum adauget triente. Quare	$\frac{4x-700}{3}+\frac{4x-700}{9}=\frac{16x-2800}{9}$
anno tertio expendit 100; ergo.	$\frac{16x-2800}{9}-100=\frac{16x-3700}{9}$
Reliquum adauget triente. Quare.	$\frac{16x-3800}{9}+\frac{16x-3800}{27}=\frac{64x-14800}{27}$
Tandem fit duplo ditior. Ergò.	$\frac{64x-14800}{27}=2x$;

 Quæ

Quæſtio itaque ad æquationem reducitur ex qua erui debet x. Utramque æquationis partem multiplica per 27, productum fit 64x - 14800 = 54x; auferas 54x, reſiduum eſt 10x - 14800 = 0, ſeu 10x = 14800; dividas per 10, habetur x = 1480. Quarè habentur nummi ſub initio & ipſum lucrum.

III. Si in aliquo ſolvendo problemate perveniatur ad æquationem quæ ipſum quantitatis incognitæ quadratum, & prætereà productum ex ipſa quantitate incognita in aliquam datam quantitatem involvat, hæc æquatio dicitur *ſecundi gradus*, vel *quadratica*. In talibus autem æquationibus hac regula utendum eſt. Singulos æquationis terminos quæ incognitam quantitatem continent ad unam partem transferas, ita ut ſinguli termini cogniti ex parte altera maneant. Si quantitatis incognitæ quadratum coefficiente aliquo afficiatur, per hunc coefficientem ſinguli æquationis termini dividantur. Tandem dimidii coefficientis quantitati incognitæ præfixi ſumatur quadratum quod ex utraque parte addatur. Jam pars æquationis quæ incognitam quantitatem continet ad perfectum quadratum reducta habebitur, ex qua proinde radix quadrata

ta extrahi poterit & deindè per regulas præſcriptas, quantitatis incognitæ valor eruetur. Ponamus $y^2 + ay = b$, addatur binc & indè quadratum dimidii coefficientia a, erit $y^2 + ay + \frac{1}{4}a^2 = b + \frac{1}{4}a^2$, extractaque radice fiet $y + \frac{a}{2} = \pm\sqrt{o + \frac{1}{4}a^2}$, & tandem $y = \pm\sqrt{b + \frac{1}{4}a^2} - \frac{a}{2}$. Diligenter obſervandum eſt radici quadratæ præfixum fuiſſe ſignum $\pm$ hoc eſt, $+$ vel $-$. Etenim radix quadrata cujuslibet quantitatis ut a^2, poteſt eſſe $+ a$, vel $- a$, ideoque $y + \frac{a}{2} = +\sqrt{b + \frac{1}{4}a^2}$, vel $-\sqrt{b + \frac{a^2}{4}}$; cum $-\sqrt{o + \frac{a^2}{4}} \times -\sqrt{b + \frac{a^2}{4}}$, reſtituat quadratum $b + \frac{a^2}{4}$ non ſecus ac facit $+\sqrt{b + \frac{a^2}{4}} \times +\sqrt{b^2 + \frac{a^2}{4}}$. Quare æquationes quadraticæ duas admittunt ſolutionea; Sic in præſenti exemplo duo ſunt valorea radicis y, unus nempè $y = +\sqrt{b + \frac{a^2}{4}} - \frac{a}{2}$; alter autem $y = -\sqrt{b + \frac{a^2}{4}} - \frac{a}{2}$. At quoniam poſitiva ſunt

omnium quantitatum quadrata, hinc patet quantitatis negativæ radicem eſſe impoſſibilem ſeu aſſignari non poſſe, quæ ideò dicitur *imaginaria*. Aliquandò contingit æquationes nullam ſolutionem admittere. Exemplo ſit $y^2 - ay + 3a^2 = 0$; erit $y^2 - ay = - 3a^2$, & $y^2 - ay + \frac{a^2}{4} = - 3a^2 + \frac{a^2}{4} = - \frac{11a^2}{4}$, extractaque radice habebitur $y - \frac{a}{2} = \pm\sqrt{-\frac{11a^2}{4}}$ & $y = \frac{a}{2} \pm \sqrt{-\frac{11a^2}{4}}$. Ex quibus manifeſtum eſt duos valores radicis y eſſe imaginarios, cum aſſignari non poſſit radix quantitatis $- \frac{11a^2}{4}$. Si ergò in ſolutione problematum deveniatur ad quantitates imaginarias, ſignum eſt admodum manifeſtum vel problema eſſe impoſſibile, vel adhibitam eſſe methodum quæ aliquid impoſſibile involvit, prorsùs ut ſit in argumentatione dum res ad abſurdum reducitur.

IV. Radices imaginariæ quæ eandem ſub ſigno radicali quantitatem habent ut $\sqrt{-a}$, $-\sqrt{-a}$ per multiplicationem efficere poſſunt productum reale in quo nullum ſuperſit ſignum radicale, dummodo radi-

radices illæ numero pari ſemper multiplicentur. Etenim evaneſcere non poteſt ſignum radicale, niſi terminus hoc ſigno affectus multiplicetur per alium terminum qui idem ſignum radicale habeat & eandem quantitatem ſigno incluſam. Jam verò ita ſublato ſigno radicali, ſi productum ex prima multiplicatione per idem ſignum radicale multiplicetur, novum productum afficietur quoque ſigno radicali; at ſi rurſus multiplicetur per idem ſignum radicale, iterum evaneſcet ſignum radicale & ita deinceps. Si polynomii terminus aliquis contineat radicem imaginariam, quale eſt polynomium $x - a - \sqrt{-b}$, evaneſcere non poteſt ſignum radicale, niſi polynomium datum multiplicetur per aliud quod a primo differat tantum quoad ſignum vinculo radicali præfixum. Ita in polynomio propoſito ſolum productum ex, $x - a - \sqrt{-b}$ in $x - a + \sqrt{-b}$ delere poteſt ſignum radicale, factaque multiplicatione habetur $xx - 2ax + aa + b$; in hoc enim ſolo caſu producta ſingula ex unoquoque termino reali in $\sqrt{-b}$, ſeſe mutuò ſignis contrariis elidunt, atque hinc patet terminum, b, qui continet productum ex duobus radicalibus $+ \sqrt{-b} \times - \sqrt{-b}$, eſſe neceſſariò poſitivum.

Ita-

Itaque quantitatum imaginariarum frequens uſus occurrere poteſt; ipſa enim impoſſibilitas non ſolum per multiplicationem aliquando tollitur, ſed etiam ſumma binarum quantitatum quæ ex realibus & imaginariis ſunt mixtæ realis eſſe poteſt; ita quantitatum $3 + \sqrt{-1}$ & $8 - \sqrt{-1}$, ſumma eſt realis nimirùm 11, atque etiam realis eſt differentia nempè 5.

V. Æquationes omnes ſecundi gradus repræſentari ſolent hac formula $x^2 - px = q$, in qua p & q deſignant quantitates quaslibet vel poſitivas vel negativas. Indè autem ſtatim concluditur $x - \frac{p}{2} = \pm \sqrt{\frac{pp}{4} + q}$. Hìc autem difficultates aliquæ ſuboriri poſſent ex præcedentibus facilè explicandæ. Quæri etenim poteſt cur quantitas poſitiva $x - \frac{p}{2}$ æqualis fiat negativæ $- \sqrt{\frac{pp}{4} + q}$. Requidem vera duo quadrata æqualia præbent æquales radices, ſed radices illæ ejuſdem ſigni eſſe debent. Etenim ex eo quod $4 = 4$, concludi non poteſt $a = - 2$. Prætereà $\frac{p}{2} - x$ tam eſt radix ipſius $xx - px + \frac{pp}{4}$

quam

quam $x - \frac{p}{2}$. Quare ſcribendum videretur $\mp x \pm \frac{p}{2} = \sqrt{\frac{pp}{4} + q}$. Has difficultates facilè ſolvemus, ſi obſervetur hanc ultimam æquationem in quatuor ſequentes reſolvi poſſe, $x - \frac{p}{2} = \sqrt{\frac{pp}{4} + q}$; $x - \frac{p}{2} = -\sqrt{\frac{pp}{4} + q}$; $\frac{p}{2} - x = -\sqrt{\frac{pp}{4} + q}$; $\frac{p}{2} - x = \sqrt{\frac{pp}{4} + q}$. Duæ ultimæ æquationes conveniunt omninò cum duabus primis; quarè ſatis eſt duplex ſignum $\pm$ in una æquationis generalis parte adhibere, ut fieri ſolet. Prætereà æquationis reſolutio hoc modo inſtitui poſſet. Radix quadrata æquationis $xx - px + \frac{pp}{4}$ eſt $x - \frac{p}{2}$, ſi x ſit major quam $\frac{p}{2}$ ſitque $\frac{p}{2} - x$, ſi x ſit minor quam $\frac{p}{2}$. In 1°. caſu habetur $x - \frac{p}{2} = \sqrt{\frac{pp}{4} + q}$; in altero autem erit $\frac{p}{2} - x = \sqrt{\frac{pp}{4} + q}$.

$\sqrt{\frac{pp}{4} + q}$. Hi ergò ſunt duo caſus diſtinctè expreſſi qui duplici ſigno in formula generali *implicitè* & obſcurè enuntiantur, hoc modo $x - \frac{p}{2} = \pm \sqrt{\frac{pp}{4} + q}$.

Si haberetur $xx + px = q$, per ratiocinationem præcedentem invenitur $x + \frac{p}{2} = \sqrt{\frac{pp}{4} + q}$, ſola nempè radix poſitiva; tum verò inutilis eſt radix negativa, cum problematis ſolutionem non præbeat. Hæc tamen radix haberetur quoque, mutata quæſtione per regulas explicatas, prodiret nempè $xx - px = q^2$, & $\frac{p}{2} - x$, vel $x - \frac{p}{2} = \sqrt{\frac{pp}{4} + q}$.

Hac igitur methodo radices poſitivas neceſſarias a ſuperfluis, veras a falſis ſeparare liceret.

Æquationum quadraticarum doctrinam facili exemplo illuſtrabimus. Itaque hoc ſit problema, invenire ſcilicet in linea duo quæcumque luminaria conjungente punctum tale ut luminaria illa ex hoc puncto æquali luce fulgeant. Diſtantia inter duo

duo luminaria dicatur, a, ſitque illuminationis ratio ut, m, ad, n; prætereà dicatur x, diſtantia minoris luminaris à puncto quæſito, erit diſtantia luminaris alterius ab eodem puncto, $a - x$. Jam ponatur luminarium effectus ſeu lucis intenſitatem eſſe in ratione reciproca duplicata diſtantiarum à puncto lucido, ut vulgò ſtatuitur à Phyſicis, ſumptis diſtantiarum quadratis, erunt intenſitates lucis ut $\frac{1}{xx}$ & $\frac{1}{xx - 2ax + aa}$. Res ita ſe haberet ſi æqualia forent luminaria; at quia (ex hypoth.) lucis quantitates abſolutæ ſunt ut m ad n, erunt luminarium effectus ut $\frac{m}{xx}$ ad $\frac{n}{xx\ 2ax + aa}$. Itaque ut habeatur punctum quæſitum, inſtituenda eſt æquatio inter $\frac{m}{xx}$ & $\frac{n}{xx - 2ax + aa}$, ex qua, per reductionum regulas, eruitur $xx + \frac{2amx}{n-m} = \frac{aam}{n-m}$, & addito, ut moris eſt, dimidii coefficientis quadrato, habetur $x^2 + \frac{2amx}{n-m} + \frac{aamm}{\overline{n-m}^2} = \frac{aam}{n-m} + \frac{aamm}{\overline{n\ m}^2}$.

Hujus æquationis radices duæ ſequenti formula exprimuntur, ut patet, nempè x $= -$

$= -\frac{am}{nn - mm} \pm \frac{a}{nn - mm} \sqrt{mn}$, vel $x = \frac{a}{nn - mm} \times -m \pm \sqrt{mn}$. Ex his evidens eſt unius radicis valorem eſſe negativum, alterius autem poſitivum. Etenim ſi quantitas radicalis ſigno — afficitur, jam quantitas tota fit negativa; ſi autem afficiatur ſigno poſitivo +, jam quantitas $- m + \sqrt{mn}$ erit poſitiva, cum ſit (ex hypoth.) n major quam m, ideòque $\sqrt{mn}$, major quam m.

Supereſt ut radicis negativæ uſum explicemus. In memoriam revocanda ſunt quæ de quantitatibus negativis jam dicta ſunt, ſcilicet quantitates negativas ſecundùm directionem poſitivis oppoſitam ſumendas eſſe. In præſenti problemate quantitatis, x, valor negativus facilè intelligetur, ſi obſervemus punctum quæſitum a nobis conſiderari tanquam inter duo luminaria conſtitutum. At ſi attendatur ad alterius caſus poſſibilitatem, ponendo nempe punctum quæſitum in linea producta ultra luminaria, jam valor radicis prodit poſitivus. Et quidem ſi diſtantia puncti a minori luminari dicatur, x, ut antè, erit luminaris majoris diſtantia, a + x, quadrata autem diſtantiarum erunt xx & aa + 2ax + xx, quæ per

per conditiones problematis in æquationem reducta præbent $maa + 2amx + mxx = nxx$; reſoluta æquatione habetur $x = \frac{a \times \overline{m \pm \sqrt{mn}}}{n - m}$, valor $\frac{a \times \overline{m + \sqrt{mn}}}{n - m}$ erit poſitivus hicque ſolus problemati ſatisfaciet in caſu propoſito. Alter autem valor negativus $\frac{a \times \overline{m - \sqrt{mn}}}{n - m}$ ſignificat ſumendam eſſe directionem oppoſitam, punctumque non in linea producta ultra luminaria, ſed in ipſa linea jungente conſtituendum eſſe. Problema ad caſum particularem transferamus. Ponatur $n = 4m$, præcedens formula $x = \frac{a}{n - m} \times \overline{-m \pm \sqrt{mn}}$ in hanc abit $x = \frac{a}{3} \times \overline{\pm 2 - 1}$. Quare duplex valor radicis x erit $+ \frac{1}{3} a$ & $- a$, qui quidem duo valores determinant puncta duo quæ problemati æquè ſatisfaciunt. Punctum unum locatur inter duo luminaria illiuſque diſtantia a lumine vividiori duplo major erit quam a debiliori. Punctum alte-

alterum conſtituetur in linea producta, illiuſque a lumine debiliori diſtantia æqualis erit ipſi luminarium diſtantiæ. Facilè autem ſine ullo algebræ auxilio intelligitur utrumque punctum problemati ſatisfacere, cum duo illa puncta lumini debiliori duplo proximiora ſint quam vividiori quæ vim habet quadruplo majorem. Hoc exemplo illuſtrantur quæ de quantitatibus negativis breviter anteà attigimus. Hæc ſunt Arithmeticæ & Algebræ elementa, breviſſima quidem, ſed tamen rerum varietate copioſa, quantùm ad noſtras inſtitutiones phyſicas ſatis eſſe judicavimus.

FINIS.

ELE-

ELEMENTA GEOMETRIÆ

PROEMIUM

De definitione & diviſione Geometriæ.

I.

G*Eometria* eſt ſcientia magnitudinum, *ſolidorum* nempè, *ſuperficierum* & *linearum*. Solidum eſt magnitudo in longum latum & profundum extenſa. Quamvis autem nihil ſit in rerum natura continuum quod tres illas dimenſiones ſimul non habeat, illæ tamen ſeorſim conſiderari poſſunt, vel etiam duas tantùm concipere poſſumus de tertia minimè cogitantes; atque hinc intelligitur notio ſuperficiei & lineæ. Superficies eſt magnitudo tantùm in longum & latum extenſa. Linea autem eſt magnitudo extenſa tantùm in longum. Et requidem ipſa, itineris longitudinem nobis repræſenta-

mus, non attenta ejus latitudine, & planitici latitudinem intelligimus, terrarum profunditatem nequaquam conſiderantes. Denique ſi concipiamus lineæ terminum cujus nulla pars ſit, nulla extenſio, jam terminus ille *punctum* dicitur. Itaque ad explicandam Tyronibus Geometriæ definitionem, id primùm oſtendi debet quomodo per varias abſtractionum gradus ex corporis *phyſici* & prout eſt in ſe conſideratione ad corporis *geometrici* & ſimpliciter extenſi contemplationem perveniamus, ac deindè ad ſuperficiei & lineæ notionem progrediamur atque tandem notionem puncti formemus. Neque methodo ſatis philoſophica utuntur qui ſtatim ſuperficiem definiunt terminum ſolidi, lineam terminum ſuperficiei, & punctum terminum lineæ. Ex præcedenti definitione naſcitur diviſio geometriæ in geometriam linearum, ſuperficierum & ſolidorum. Quare tres erunt geometriæ ſectiones. 1ª De lineis. 2ª De ſuperficiebus. 3ª De ſolidis. In prima ſectione linearum poſitionem illarumque mutuam relationem expendemus. Porrò linearum nomine non ſolum intelligimus lineam rectam, ſed etiam lineam circularem cujus utilitas eſt maxima in conſideranda linearum rectarum mutua poſitione. Quarè ad geometriæ elementa

menta pertinent quoque circuli proprietates. In ſecunda autem ſectione ſuperficierum proprietates & menſuram conſiderabimus. In tertia tandem ſectione proprietates ſoliderum, illorumque menſuram demonſtrabimus. At recta methodus poſtulat ut rerum demonſtrandarum varietatem in unaquaque ſectione variis capitibus diſtinguamus.

II. Lineam repræſentare ſolent Geometræ tanquam genitam motu puncti. Si punctum directionem non mutat, linea hoc motu deſcripta *recta* dicitur; *curva* autem appellatur, ſi punctum perpetuo mutet directionem. At fatendum eſt ita ſimplicem eſſe rectæ & curvæ notionem ut ad clariorem ideam magiſque *elementarem* reduci vix poſſit. Rectam definiunt alii lineam omnium inter duos terminos ductarum breviſſimam. Cæterum inde evidens eſt datis in linea recta punctis duobus, datam eſſe hujus lineæ poſitionem, ita ut unica duntaxat recta per hæc duo puncta tranſire poſſit. Ex his etiam intelligitur quid ſit ſuperficies plana omnium ſuperficierum eoſdem terminos habentium breviſſima, vel cui linea recta undequaque adaptari poteſt. Circulus definitur figura plana, unica curva linea comprehenſa quæ *peripheria* dici-

tur, ſive *circumferentia*, ad quam omnes rectæ lineæ a puncto medio quod *centrum* dicitur ductæ æquales ſunt inter ſe; circumferentiæ pars quælibet *arcus* vocatur. Linea recta per centrum ducta & utrinque terminata, *diameter* dicitur; rectæ autem a centro ad circumferentiam ductæ *ſemidiametri* vel *radii* appellantur.

III. *Anguli* notio ope circuli facillimè concipitur. Duæ lineæ rectæ in aliquo puncto concurrentes angulum efficere dicuntur. Angulorum menſura eſt arcus quem ipſorum latera comprehendunt in peripheria circuli ex anguli vertice tanquam centro deſcripti. Porrò dum dicitur anguli menſuram eſſe arcum circuli, nihil aliud ſignificatur niſi æquales eſſe angulos, ſi æquales ſint arcus ex angulorum vertice & eodem radio deſcripti. Ita dum dicitur angulum eſſe alterius duplum, nihil aliud intelligitur niſi arcum unum altero eſſe duplo majorem. Itaque anguli natura in majori aut minori inclinatione unius lineæ ad aliam conſiſtit. Igitur angulus cum ſit mera linearum inclinatio & *apertura*, extenſio vel quantitas propriè loquendo dici non poteſt; ac proindè, abſtractione facta ab omni extenſionis conſideratione, angulum alterius duplum dicere non poſſumus, cum id dici poſſit

poſſit duntaxat de quantitate comparata cum alia quantitate homogenea. Quia verò mera linearum apertura partes non habet, angulus non eſt quantitas propriè dicta, atque hinc factum eſt ut anguli menſuram cum circuli arcu comparaverint geometræ. Circulus dividi ſolet in partes æquales 360 quæ *gradus* dicuntur; ſinguli gradus dividuntur in 60 minuta prima, quodlibet minutum primum dividimus in 60 ſecunda & ſic in infinitum. Gradus per, o, deſignari ſolent, minuta autem per lineolas numeris ſuperimpoſitas. Ita ſi fortè occurrant 35°, 25′ 36″ 42‴, lege 35 gradus, 25 minuta prima, 36 ſecunda, 42 tertia.

IV. Ex angulorum notione pendet linearum mutua poſitio. Linea dicitur alteri lineæ *perpendicularis*, quando in ipſam incidens facit angulos hinc & inde æquales, angulus hujuſmodi dicitur *rectus*. At ſi recta una ſuper alteram cadens duos angulos efficiat ita ut unus ſit recto major, alter autem minor, primus dicitur *obtuſus*, alius autem *acutus*. Si talis ſit rectarum poſitio ut eandem ſemper a ſe invicem ſervent diſtantiam, evidens eſt nullam eſſe linearum illarum mutuam inclinationem, ac proindè in infinitum etiam protractæ non concurrent ſeu

ſeu angulum non efficient, tales lineæ dicuntur *parallelæ*.

V. Ex lineæ rectæ definitione evidens eſt duas lineas rectas in unico duntaxat puncto concurrere poſſe; cum enim omni careant latitudine, communis interſectio in unico tantum puncto fieri poteſt. Neque ad aliam deinde interſectionem tranſire poſſunt; alterutra enim linea directionem mutaret ac proinde non forent ambæ rectæ, quod eſt contra hyp. Id pro axiomate habent geometræ & ita exprimi ſolet: *Duæ lineæ rectæ ſegmentum commune habere, nec ſpatium claudere poſſunt*. Itaque tres ſaltem lineæ requiruntur ut ſpatium undique claudatur; ſpatium undique clauſum *figura* dicitur. *Triangulum* eſt figura terminata tribus lineis, quæ ejuſdem latera vocantur. Hæc autem latera ſi fuerint æqualia, triangulum dicitur *æquilaterum*; ſi duo tantùm latera ſint æqualia, triangulum vocatur, *iſoſceles*. Demùm ſi latera omnia fuerint inæqualia, triangulum *ſcalenum* dicitur. Rursùs autem triangulum ratione angulorum conſiderari poteſt; ſi unum habeat angulum rectum, triangulum *rectangulum* dicitur, *acutangulum* ſi omnes habeat angulos acutos & tandem *obtuſangulum* ſi angulum obtuſum habuerint.

VI. Fi-

VI Figura quatuor lateribus terminata, *quadrilaterum* generatim appellatur. Si autem æqualia ſint figuræ latera & ad angulos rectos juncta, *quadratum* dicitur; at ſimpliciter rectangulum vocatur, ſi latera duo oppoſita reliquis duobus majora ſint, manentibus tamen angulis rectis. *Parallelogrammum* appellatur figura quadrilatera cujus bina oppoſita latera ſunt mutuò parallela, etiamſi anguli lateribus comprehenſi non ſint recti. Si figura quadrilatera ſit æquilatera, non tamen rectangula, *Rhombus* dicitur, & *Rhomboides* vocatur ſi latera oppoſita duntaxat æqualia habuerit. Tandem quodlibet quadrilaterum ab iis quæ jam enumeravimus diverſum, *Trapezium* appellatur; ſed figura *polygona* dicitur quæ pluribus quam quatuor lateribus terminatur. Si latera fuerint quinque, ſex, ſeptem &c., figura *pentagonum*, *hexagonum*, *heptagonum* &c. dici ſolet. Figura autem polygona *regularis* eſt quæ æquilatera & æquiangula eſt.

VII. Axiomata & poſtulata plurima præmittere ſolent geometræ, quæ quidem nos omittimus. Quæ enim eſt axiomatum de toto & parte utilitas ut intelligamus dimidiam lineam tota minorem eſſe? Ecquis ſtatim non videt rectam lineam

neam produci poſſe, circulum dato intervallo poſſe deſcribi & reliqua hujuſmodi. Verùm inter axiomata unum de figurarum *ſuperpoſitione* legitur ſimpliciſſimum quidem & in univerſa geometria utiliſſimum, quod ſine aliqua explicatione prætermittere nolumus. Dicunt nempè *ea eſſe æqualia quæ ſibi mutuò ſuperimpoſita perfectè congruunt*. Principium illud *ſuper poſitionis* non ita craſsè intelligendum eſt quaſi in mutua figurarum applicatione conſiſteret, non ſecùs ac artifex menſuram aliquam datæ longitudini applicat ut indè veram longitudinem concludat; talis demonſtrandi ratio minimè foret geometrica. In eo poſitum eſt prædictum principium ut figuram alteri impoſitam imaginemur & deindè concludamus 1°. Ex partium datarum æqualitate, ipſam earundem partium convenientiam ſive *coincidentiam*... 2°. Ex hac coincidentia ipſam reliquarum partium coincidentiam ac proindè & perfectam duarum figurarum æqualitatem & ſimilitudinem. Itaque *ſuperpoſitionis* principio intelligenda non eſt duntaxat mutua figurarum applicatio, ſed partis unius alteri parti impoſitio ut deindè figuras illas inter ſe comparemus. Undè evidens eſt idem valere principium ad demonſtrandam figura-

gararum inæqualitatem. Cæterùm hoc unico principio cum angulorum menſura per arcus circulares conjuncto, demonſtrari poſſunt propoſitiones omnes quæ ad elementarem linearum geometriam pertinent.

SECTIO I.

De Geometria linearum.

CAPUT I.

De lineis rectis quoad mutuam poſitionem conſideratis, nullo tamen ſpatio ſeu nulla figura terminatis.

PROP. I. RECTA QUÆLIBET IN RECTAM CADENS VEL DUOS ANGULOS EFFICIT RECTOS, VEL DUOBUS RECTIS ÆQUALES. Etenim recta inſiſtat perpendiculariter ut, GE, vel obliquè ut RE (Fig. 1.) In 1°. caſu patet (ex def.) angulos GEF, GEC, eſſe rectos. In caſu altero, anguli duo CER, ERF, ſimul ſumpti, æquales ſunt duobus angulis CEG, GEF, hoc eſt, duobus rectis.

COR. I. Producta linea RE in, O, ſimili ratione patet angulos FEO, OEC, duobus rectis æquales eſſe, ac proindè duæ rectæ ſeſe invicem ſecantes efficiunt an-

gulos quatuor rectis æquales. Jam centro, E, deſcribatur circulus, menſura angulorum quatuor erit integra circuli circumferentia, hoc eſt, gradus 360. Igitur angulus rectus erit quarta pars circumferentiæ, nempè 90°.

COR. II. Rectæ GH, RO, in unam lineam coaleſcere non poſſunt, ſed efficiunt angulos, GER, HEO, qui dicuntur *ad verticem oppoſiti*. Illos autem angulos æquales eſſe manifeſtum eſt; cum ſit dimidium peripheriæ RFO, æquale dimidio peripheriæ, GFH; ſublata autem communi parte, GO, erunt arcus reliqui GR, HO, æquales inter ſe.

COR. III. Recta, GE, ad alteram, CF, perpendicularis eſt, ſi puncta duo quælibet, G, E, a punctis duobus quibuslibet ut, C, F, æqualiter diſtent, hoc eſt, ſi GC = GF, & CE = EF. Etenim puncta duo E, G, non magis inclinant versùs, C, quam versùs F, ac proindè cum duo puncta lineæ rectæ poſitionem determinent (ex def.), æqualis eſt rectæ totius GE, hinc & indè ad rectam, CF, inclinatio, ideòque ob angulos utrinque æquales, recta GE, perpendicularis ad CF. Patet autem puncta C, F, ſumi poſſe pro arbitrio inter CE, & EF.

COR. IV. Ex puncto quolibet, E, in recta,

recta, CF, dato, duci poteſt ad eandem rectam perpendicularis GE. Etenim centro E, & dato quolibet æquali intervallo, Ec, Ef, deſcribantur arcus circuli, ſeſe invicem ſecantes in g, recta per, g, & E ducta erit perpendicularis quæſita, ob diſtantias gc, gf & Ec, Ef, æquales.

Si punctum, h, extra rectam datum ſit, ſimili ratione ducitur perpendicularis hE. Etenim ex puncto h ſumantur æqualia intervalla hc, hf; deindè ex punctis c & f, tanquam centris & eodem intervallo deſcribantur arcus circuli ſe mutuò ſecantes in, g, ducaturque, hg, hæc erit perpendicularis, ob æquales hc, hf, & gc, gf, diſtantias. Evidens autem eſt in utroque caſu unicam perpendicularem duci poſſe. Unica enim eſt recta tranſiens per punctum E, vel, h, quæ cum recta CF, æquales hinc & indè efficiat angulos. Patet autem lineam perpendicularem eſſe omnium quæ ex puncto dato ad lineam datam duci poſſunt breviſſimam; cum recta perpendicularis non magis pendeat ex una parte quam ex alia ac proindè neque ad dexteram declinet neque ad ſiniſtram, ideòque breviſſima eſt via a puncto dato ad lineam datam. Item evidens eſt ex puncto dato ad lineam datam, unicam perpendicularem duci poſſe.

Eadem omninò eſt operatio, ſi recta, cf, in duas partes æquales dividenda proponatur. Ex punctis c, f tanquam centris & eodem radio deſcribantur arcus circuli ſeſe ſecantes in, g; deindè ex iiſdem punctis & ſumpto quolibet eodem intervallo deſcribantur arcus ſe invicem ſecantes in, h, recta, hg, dividet, cf, æqualiter in, E, ut patet; cum ſingula puncta rectæ gh, æqualiter diſtent a punctis c, f, ac proindè Ec = Ef.

PROP. II. Si lineæ AB, DC, ſint parallelæ (Fig.2.), erit 1°. ANGULUS OFD QUI EXTERNUS DICITUR ÆQUALIS ANGULO, OGB, QUI INTERNUS ET OPPOSITUS VOCATUR. 2°. ÆQUALES ERUNT ANGULI BGF, GFC, QUI DICUNTUR ALTERNI. 3°. ANGULI INTERNI ET AD EANDEM PARTEM POSITI DFG, FGB ÆQUALES ERUNT DUOBUS RECTIS. Cum lineæ parallelæ eodem inter ſe ubique diſtent intervallo (ex def.) ipſo naturæ lumine notum eſt eandem fore parallelæ utrinſque, BA, DC inclinationem ad rectam EO, ac proindè angulus, OFD, æqualis eſt angulo OGB, quod erat 1um. Præterea cum angulus GFC æquetur angulo, DFD, ad verticem oppoſito (cor.2. prop.1.) erunt etiam æquales anguli BGF, GFC. Quod erat 2um. Tandem cum anguli

guli OFD, GFD, æquentur duobus rectis (prop. I.) æquales itidem erunt duobus rectis DFG, FGB. Quod erat 3um.

Viceverſa ſi angulus OFD æqualis ſit interno & oppoſito, FGB, erit eadem inclinatio rectarum CD, AB ad rectam EO ac proindè rectæ illæ parallelæ ſunt inter ſe. Rurſus ſi æquales ſint anguli alterni BGF, GFC; vel ſi duobus rectis ſimul æquales ſint interni ad eandem partem poſiti BGF, GFD, angulus externus DFO ſemper æqualis erit angulo interno & oppoſito BGF, ac proindè rectæ AB, CD, erunt parallelæ. Itaque ex ipſa paralleliſmi notione facilè colliguntur tres primariæ parallelarum affectiones neceſſariò nexu inter ſe conjunctæ, ita ut ex una qualibet inferre liceat rectas illas eſſe parallelas. Porrò in demonſtrandis proprietatibus illis nimis laborare videntur quidam Geometræ.

COR. I. Si duæ rectæ AB, HK, parallelæ ſint eidem rectæ, CD, erunt etiam inter ſe parallelæ. Etenim inclinatio rectarum KH, BA ad rectam EO eadem erit ac inclinatio rectæ CD, ad eandem.

COR. II. Si per datum punctum, F, ducere oporteat rectam, CD, parallelam rectæ, AB, ex quolibet hujus puncto, G, ducatur recta GFO, & fiat angulus OFD

 æqua-

æqualis angulo OGB, deſcriptis nempè ex punctis O, F, tanquam centris & eodem radio arcubus æqualibus FM, GN erit recta FD, parallela ipſi AB.

CAPUT II.

De linearum rectarum reſpectu circuli poſitione.

PROP. I. DUCTA RECTA, FM, AD CIRCUMFERENTIAM UTRINQUE TERMINATA QUÆ CORDA DICITUR (Fig 3.), RECTA EX CENTRO CIRCULI AD CORDAM PERPENDICULARITER DUCTA, EANDEM SECAT IN DUAS PARTES ÆQUALES. Cum enim recta EP, e centro ducatur, punctum, E, æqualiter diſtat a punctis extremis cordæ F, M, (ex defin. circ.). Præterea cum recta EP, ſit perpendicularis ad cordam, ſingula alia puncta æqualem habent ab iiſdem extremis diſtantiam (cor. 3. prop. I.). Quarè punctum, P, æqualiter etiam diſtat a punctis, F, M.

Et viceverſa recta quælibet, EP, per centrum tranſiens & cordam æqualiter dividens, eam quoque perpendiculariter ſecat. Etenim cum recta EP, cordam dividat æqualiter, punctum P, æqualiter diſtat

diſtat ab extremis F, M. Quia verò recta EP, tranſit etiam per centrum, punctum E, æqualiter diſtat ab extremis F, M. Quarè puncta, P, E æqualiter diſtant a punctis F, M, ac proinde EP perpendicularis eſt ad FM.

Rursùs ſi recta EP, perpendicularis ſit ad cordam, eamque æqualiter dividat, recta illa tranſit per centrum. Cum enim cordam dividat æqualiter, punctum, P, æqualiter diſtat ab extremis F, M. Prætereà cum ſit perpendicularis, ſingula illius puncta æqualiter etiam diſtant a punctis F, M. Erit ergò centrum, E, hujus perpendicularis punctum aliquod.

PROP. II. SI RECTA EH TRANSIENS PER CENTRUM DIVIDAT ÆQUALITER CORDAM FM, ÆQUALITER QUOQUE DIVIDET ARCUM FHM. Etenim cum ſingula puncta rectæ, EH, æqualiter diſtent a punctis F, M, æqualis erit puncti, H, ab extremis F, M, diſtantia. Quarè ſi ſemicirculus GMH, ſemicirculo GFH, imponatur, congruet punctum M, cum puncto, F, & ob punctum, H, commune, congruent & cordæ HM, FH & arcus iiſdem cordis ſubtenſi.

COR. I. In eodem circulo vel in circulis æqualibus, cordæ æquales æqualibus arcubus reſpondent, inæquales autem arcu-

 bus

bus inæqualibus. Prætereà cordæ æquales, æqualiter diſtant a centro, cordæ autem inæqnales diſtant inæqualiter; quod evidens eſt ex *ſuperimpoſitionis* principio. Nam corda æqualis cum æquali corda ſemper congruet, nec cum corda inæquali congruere unquam poterit.

COR. II. In eodem ſemicirculo vel in ſemicircolis æqualibus, quo majores ſunt vel minores arcus, eo majores vel minores ſunt cordæ & centro magis vel minus proximæ. Viceverſa quo majores ſunt vel minores cordæ, centro magis vel minus proximæ; eò etiam majores ſunt vel minores arcus ſubtenſi.

COR III. Ducta corda, FM, diametro, AB, parallela intercipit æquales arcus AF, BM. Etenim, cæteris manentibus ut antè, arcus AH = arcui BH, & arcus FH = arcui HM, quarè demptis arcubus æqualibus remanet AF = BM. Evidens eſt eandem eſſe demonſtrationem, ſi parallela, NQ, ad oppoſitas diametri partes jaceat, erit nempè arcus FN = arcui MQ.

COR. IV. Si ponatur rectam, NQ, motu ſibi ſemper parallelo a centro recedere, donec puncta duo N, Q, coeant in, G, corda NQ, abit in *tangentem* quæ nempè circulum in unico puncto tangit;

evi-

evidens autem eſt in hoc etiam caſu eſſe $GN = GQ$.

COR. V. Ex corollariis præcedentibus patet qua ratione per tria data puncta circulus deſcribi poſſit, dummodò tamen puncta illa in eadem recta non jaceant. Agantur rectæ duæ quæ jungant tria puncta data, hæ erunt cordæ circuli quæſiti. Quare ductis perpendicularibus quæ cordas dividant æqualiter, utraque perpendicularis tranſit per centrum, quod proindè erit in communi utriuſque perpendicularis interſectione. Simili ratione dato circuli arcu centrum invenitur, totaque circumferentia deſcribitur.

COR. VI. Hinc arcus circuli datus in duos æquales arcus dividi poteſt. Ducatur corda arcum datum ſubtendens, hæcque æqualiter per rectam perpendicularem dividatur, eadem perpendicularis etiam angulum quem arcus metitur æqualiter in duas partes dividet.

SCHOL. Ex hoc corollario patet facilè dividi poſſe angulum quemlibet in partes 2, 4, 8, 16, 32 & ita deinceps ſecundùm terminos progreſſionis geometricæ duplæ; ſed, per geometriam elementarem, angulus in tres partes æquales dividi non poteſt, atque hæc eſt anguli *triſectio* a geometris per *circinum* & *regulam*, ut dicunt,

dicunt, hoc eſt, per lineæ rectæ & circuli conſtructionem, fruſtra quæſita. Demonſtraut enim geometræ problema illud ad tertii gradus æquationem neceſſariò pertinere, quæ quidem æquation s per ſolum circulum conſtitui non poſſunt. Neque ob eandem rationem per ſola geometriæ elementa angulus dividi poteſt in partes 5, 6, 7, 9 &c. Talis enim diviſio, pro diverſo partium æqualium numero, ad altiores æquationum gradus aſſurgit. Id autem, quamvis ad elementa non pertineat, breviter monuiſſe volumus.

PROP. III. Radius, EG, in puncto contactus G ad tangentem perpendicularis est. Etenim quoniam tangens circulum in unico puncto tangit (ex cor. præc.), radius, EG, minima eſt tangentis a centro diſtantia, ac proindè ad tangentem perpendicularis. (ex def.).

Viceverſa recta RT perpendicularis ad extremitatem radii, G, circulum tangit in unico puncto G. Etenim cum ſit EG, minima rectæ RT a centro, E diſtantia, alia quælibet puncta rectæ, RT, magis diſtant a centro quam punctum G, ergò ſingula puncta præter, G, extra circumferentiam jacent.

COR. I. Recta circumferentiam tangit

in unico puncto; cum ex centro, E, ad rectam datam unica perpendicularis duci poſſit. (cor. 4 prop. 1. cap 1.).

COR. II. Hinc facilè ducitur tangens ad punctum datum G. Ducto ſcilicet radio EG erectaque in, G, perpendiculari RT.

COR. III. Ad punctum datum in circumferentia, unica tangens duci poteſt (loco cit.) ac proindè ſi per punctum contactus agatur recta quælibet, hæc coincidit cum tangente vel circumferentiam ſecat.

COR. IV. Si duo circuli GNA, GOQ, eandem habent tangentem, recta HG eidem perpendicularis per utriuſque centrum puta E, P, tranſibit. Jam verò ſi ducatur ES, jungaturque PS, quæ producta ſecabit in, O, circulum, GOQ, & in R, tangentem RT; erit ſemper in triangulo, ESP, latus PS, minus duobus reliquis, ES, EP (ex def. lineæ rectæ). Quare cum radii ES, EG æquales ſint, erit recta, PS, minor quam PG ſive PO. Ergò quodlibet punctum, S, circuli, GSF, erit intra circulum GOQ ac propterea illi circuli ſe mutuò contingent in unico puncto G, in quo ſcilicet rectam, RT, tangunt.

SCHOL. Cum inter tangentem & circulum

enlnm nulla duci poſſit linea recta, angu-
lus quem arcus circuli efficit cnm tangen-
te minnr eſt quolibet rectilineo, licet hic
in infinitum minuatur. Hujus propoſitio-
nis utilitas eſt in Phyſica ubi agitur de di-
viſibilitate in infinitum. Id verò maxi-
mam admirationem concertationeſque ma-
ximas excitavit; nempè angulns contactus
qnem ſacit arcns cum tangente ab infinita
circulorum ſerie in infinitas partes divi-
ditnr, licet ipſe qnovis angulo rectilineo
minor ſit. Hujus autem paradoxi Geome-
trici canſam indè repetnnt nonnulli, quod
nempè anguli rectilinei natnra diverſa om-
ninò ſit a natura anguli curvilinei in pun-
cto cnntactus. Etenim qnemadmodnm in-
finitæ lineæ nnnquam ſuperficiem efficiunt,
nec ulla inter bas quantitates ratio poteſt
aſſignari, licet in partes infinitas dividi
poſſint, ita etiam infiniti anguli conta-
ctus qnovis rectilineo minores ſunt, licet
ſint diviſibiles in infinitum. Verùm in
hac lite geometrica *logomachia* aliqna late-
re videtur. Si anguli nomine intelligarur
portin finita ſpatii curva & tangente cnm-
prehenſi, nullum dubium eſt quin ſpatium
illud comparari poſſi cum portione fini-
ta ſpatii rectarum duarum concurſu in-
tercepti. At ſi angnli rectilinei notio vul-
garis adhibeatnr, evidens eſt nntinnem il-
lam

lam abſolutè conſideratam angulo contactus convenire non poſſe, cum in hoc angulo latus unum ſit curvilineum. Itaque hujus anguli afferri debet propria definitio, atque hac definitione quæ arbitraria omninò eſt ſemel conſtituta & explicata, jam nihil difficultatis ſupereſſe poteſt. Et requidem ipſa de ſolo nomine hic litigari demonſtrat ſumma geometratum conſenſio circa anguli hujus proprietates. Sed quidquid ſit, quicumque geometricarum demonſtrationum vim percipiet, pro evidenti habebit angulum contactus & minorem eſſe quovis rectilineo & in infinitos curvilineos dividi poſſe.

PROP. IV. ANGULUS, BAD, TANGENTE BA ET CORDA AD COMPREHENSUS HABET PRO MENSURA DIMIDIUM ARCUM AFD. Etenim ducta per centrum, C, diametro, EG, cordæ AD, parallela (Fig. 4.) ductaque alia diametro fF eidem cordæ perpendiculari, rectus erit angulus BAC, tangente & radio comprehenſus (prop. præc.) itemque rectus eſt angulus FCG, ac proindè utriuſque anguli menſura eſt arcur FG. Sed angulus BAD = BAC − DAC, vel − ACG, ob parallelas DA, EG. Quarè cum ACG pro menſura habeat arcum AG, erit angulus BAD = FAG − AG = FA = $\frac{1}{2}$ AD.

PROP. V.

PROP. V. ANGULUS CAD (Fig. 5.) AD CIRCUMFERENTIAM HABET PRO MENSURA DIMIDIUM ARCUM, CD, LATERIBUS AC, AD, INTERCEPTUM. Etenim ex anguli vertice, A, ducatur tangens EB, ſumma trium angulorum BAC + CAD + DAE = 180° = $\frac{1}{2}$ AC + $\frac{1}{2}$ CD + $\frac{1}{2}$ DA. Sed angulum BAC metitur $\frac{1}{2}$ AC & angulus EAD = $\frac{1}{2}$ AD (ex prop. præc.). Ergò angulus CAD = $\frac{1}{2}$ CD.

COR. I. Angulus DFC ad centrum duplus eſt anguli DAC ad circumferentiam, eodem arcu, CD, ſubtenſi.

COR. II. Angulus rectus in circumferentia circuli, ſemicircumferentiam lateribus ſuis comprehendit totaque diametro ſubtenditur. Angulus acutus arcum ſemicircumferentia minorem, obtuſus autem majorem intercipit, uterque corda ſubtenditur.

COR. III. Angulus BAD (Fig 6. 7.) vel intra vel extra circulum pro menſura habet $\frac{1}{2}$ BD ± $\frac{1}{2}$ CE. Signum + valet pro angulo intra circulum, ſignum — pro angulo extra. Per E agatur corda, EF, rectæ AD parallela, erit angulus BEF = BAD (ob parallelas). Sed menſura anguli BEF eſt $\frac{1}{2}$ BF, & $\frac{1}{2}$ BF = $\frac{1}{2}$ BD ± DF, & DF = CE (cor. 3. prop. 2.). Ergò $\frac{1}{2}$ BF = $\frac{1}{2}$ BD ± $\frac{1}{2}$ CE. COR.

COR. IV. Angulus bAD (Fig. 6.) tangente Ad & ſecante, AD, interceptus $= \frac{1}{2}$ Db $- \frac{1}{2}$ bC. Si enim circa punctum, A, revolvi intelligatur recta, AB, donec tangens evadat in b, puncta E, B, convenient in b. Simili ratione angulus, dAb, inter duas tangentes Ad, Ab, comprehenſus, pro menſura habet $\frac{1}{2}$ dFb $- \frac{1}{2}$ dCb.

CAPUT III.

De lineis rectis quæ ſpatium claudunt, ſeu de figurarum rectilinearum proprietatibus.

PROP. I. IN TRIANGULO QUOLIBET, SUMMA TRIUM ANGULORUM ÆQUALIS EST DUOBUS RECTIS. Etenim per tres angulorum vertices deſcribatur circulus (cor. 2. prop. 2. cap. 2.) triangulum erit inſcriptum circulo cujus cordæ erunt tria latera; anguli autem habent pro menſura dimidium arcuum lateribus oppoſitis ſubtenſum (prop. 5. cap 2.). Quare trium angulorum ſumma æqualis eſt dimidiæ trium arcuum ſummæ, hoc eſt, dimidiæ circumferentiæ ſeu gradibus 180.

COR. 1. In triangulo unicus eſſe poteſt angulus rectus vel obtuſus, reliqui duo ſunt

ſunt acuti. Quare in triangulo rectangulo, angulus acutus eſt *complementum* alterius ad rectum.

COR. II. Datis duobus angulis in triangulo datur & tertius qui eſt differentia inter datam duorum angulorum ſummam & gradus 180. Si autem unicus datus ſit angulus, data eſt reliquorum duorum ſumma quæ eſt *complementum* ad duos rectos, & *ſupplementum* ſimpliciter appellari ſolet.

COR. III. In triangulo quolibet ABC (Fig. 8.) producto latere, CB, angulus externus ABI æqualis eſt duobus angulis internis oppoſitis ACB, CAB. Etenim ſumma anguli externi, ABI, & interni contigui ABC, æqualis eſt duobus rectis (prop. 1. cap. 1.). Sed ſumma trium angulorum ACB, CAB, ABC æqualis etiam eſt duobus rectis. Ergò angulus externus ABI æqualis eſt duobus internis oppoſitis, ACB, CAB; dempto ſcilicet communi angulo, ABC.

PROP. II. IN OMNI TRIANGULO MAJUS LATUS OPPONITUR MAJORI ANGULO, MINUS AUTEM MINORI, ET VICEVERSA ANGULUS MAJOR MAJORI LATERI ET MINOR MINORI OPPONITUR. Triangulum circulo inſcribatur, majorem angulum metitur arcus major, & majorem arcum ſubtendit major corda & contra (cor. 2. prop. 2. cap. 2.). COR. I.

COR. I. In triangulo æquilatero, ſinguli anguli æquales ſunt iuter ſe, & viceverſa ſi tres anguli ſuut æquales iuter ſe, triaugulum eſt æquilaterum. Inſcripto enim, ut aute, rriangulo in circulo, tria latera æqualia fient tres æquales circuli cordæ quæ proindè tres arcus æquales ſubtendent ideoque & tres anguli æquales ſunt. Evidens autem eſt uuumquemque angulum eſſe tertiam partem grad. 180, hoc eſt, grad. 60.

COR. II. Iu triangulo iſoſcele æquales ſunt anguli lateribus æqualibus oppoſiti; & contra ſi duo auguli in triangulo æquales ſunt, triangulum eſt iſoſcele. Patet ut in coroll. præc.

PROP. III. Si in duobus triangulis tria latera æqualia sint, tota triangula erunt æqualia. Sit AB = ab, AC = ac, BC = bc (Fig. 9.) Ex punctis A, B, tanquam centris deſcribantur arcus FCG, DCE, ſe invicem ſecantes in C. Triangulum, abc, ita imponatur triangulo ABC, nt punctum, A, conveniat cum a; punctum, b, cadet etiam in B, ob AB = ab; & ob, ac = AC, recta, ac, terminabitur in aliquo pnncto arcus FCG. Similiter ob bc = BC, recta, bc, terminabitur in aliquo puucto arcus DCE; quia verò re-

ctæ, ac, bc, ſe mutuò jungunt in, c, utraque terminabitur in puncto interſectionis C. Ergò, ac, congruet cum AC; bc, cum BC, totumque triangulum, abc, cum triangulo ABC.

COR. I. Si ſit angulus A = a, B = b, C = c & latus AB = ab, erit triangulum ABC = triangulo abc. Latus, ab, imponatur lateri AB; ob angulum a = A & b = B, cadet, ac, in AC &, bc in, BC; quare latera duo, ac, bc, & AC, BC, in eodem puncto jungentur, hoc eſt, c cadet in C totumque triangulum abc, congruet cum triangulo ABC. Eodemmodo comparari inter ſe poſſunt latera duo, ac, AC, quæ reſpondent angulis æqualibus & dicuntur *omologa*. Quare æqualia ſunt triangula duo, ſi anguli unius æquales ſint angulis alterius & præterea ſi triangula latus unum omologum æquale habeant.

COR. II. Si duo triangula latera duo habuerint æqualia & angulos his lateribus interceptos æquales, tota triangula erunt æqualia. Sit AC = ac, AB = ab & angulus A = a. Imponatur latus AB lateri, ab, & latus AC, lateri ac; ob angulos A, a, æquales, latera illa congruent. Præterea cum ſit AC = ac, & AB = ab, punctum, c, cadet in C & b in B, ac proinde bc congruet cum BC. PROP.

PROP. IV. Si duo triangula inæqualia æquales habeant angulos, ponaturque angulus unus supra alterum æqualem angulum, itemque ſibi mutuò imponantur latera omologa quæ æqualem in utroque triangulo angulum comprehendunt, erit tertium latus tertio lateri parallelum. Ponatur angulus D (Fig. 10.) ſupra angulum æqualem B, latus DF, ſupra latus omologum BC & latus DE, ſupra latus, BA, itidem omologum; erit latus FE vel, fe, parallelum lateri AC. Cum enim angulus feB æqualis ſit angulo CAB, erit recta, fe, rectæ AC parallela (prop. 2. cap. 1.). Si angulus, F, poneretur ſupra angulum æqualem, C, ſimili modo demonſtratur rectam DE eſſe rectæ, AB, parallelam. Idem dicendum de rectis FD, BC.

Viceverſa ſi per punctum f, pro arbitrio ſumptum in latere trianguli agatur recta fe parallela rectæ AC, æquales ſunt anguli Bfe, BCA, & Bef, BAC. (loc. cit.). Triangula illa quæ angulos habent reſpectivè æquales dicuntur *ſimilia*.

PROP. V. Quodlibet polygonum reſolvi poteſt in tot triangula quot ſunt polygoni latera. Etenim ex puncto, C, intra polygonum

(Fig. 11.) ad ſingulos aogulos duci poſſunt rectæ; evidens autem eſt tot eſſe triangula quot polygoni latera.

Alia ratione in triangula dividi poſſunt polygona (Fig. 12.). Si nempe ex polygoni angulis ducantur tot rectæ, qoot duci poſſunt, quæ tamen ſe mutuò non ſecent. Illæ autem rectæ quæ ab angulo polygoni ad alium ducuntur, *diagonales* vocantur; patet in hoc caſu tot eſſe triangula quot latera polygoni, demptis doobus.

COR. I. Summa angulorum polygooi æqualis eſt producto ex 180° iu oumerum laterum, demptis duobus, hoc eſt, demptis 360°. Etenim anguli polygooi ſimul ſumpti æquales ſunt aogulis omnibus triaogulorum in quæ reductum eſt polygonum, demptis angulis quorum vertex eſt in C. Horum autem angulorum ſumma eſt 360°. (prop. 1. cap. 5.). Sed tot ſunt triangula quot latera; quare ſumma omnium angulorum polygoni æqualis eſt producto ex 180° io numerom laterum, binario mulctatum. Ita ſi polygooum, habuerit ſeptem latera, ſumma aogulerum eſt $= 180° \times \overline{7-2} = 900$.

Idem quoque evidens eſt, ſi polygonum per diagonales in triangula dividatur; erit enim in his triangulis angulorum ſumma angu-

angulis polygoni æqualis, ac proindè ſumma illa æqualis eſt producto ex 180° in numerum triangulorum, hoc eſt, in numerum laterum polygoni, demptis duobus.

COR. II. Polygonum quodlibet regulare circulo inſcribi poteſt. Dividantur in duas partes æquales anguli polygoni per rectas AC, BC, DC, EC &c.; rectæ illæ ſe mutuò ſecabunt in C, & erunt inter ſe æquales. Etenim rectæ AC, BC, ſibi occurrentes in puncto aliquo, C, efficiunt triangulum, ABC; itemque rectæ BC, DC, aliud efformant triangulum BCD. Sed triangula illa ſunt æqualia; nam cum anguli polygoni regularis æquales ſint & bifariam æqualiter dividantur, æquales ſunt anguli CAB, CBA, inter ſe & angulis CBD, CDB; præterea æqualia ſunt latera AB, BD. Ergò iſoſcelia ſunt & æqualia triangula ACB, BCD. (cor. 2. prop. 3.). Quare AC = DC = BC; & propter latus commune, BC, punctum interſectionis, C, rectarum AC, BC, cadet in punctum interſectionis, C, rectarum BC, DC. Idem valet de aliis rectis EC, FC &c.

COR. III. Radii e centro polygoni regularis ad angulos ducti polygonum dividunt in tot triangula iſoſcelia & æqualia quot ſunt polygoni latera; & quodlibet poly-

polygoni latus ſit corda arcus qui æqualis eſt quoto ex gradibus 360 per numerum laterum diviſis. Ita latus decagoni eſt corda arcus grad. 36.

COR IV. Latus exagoni regularis circulo inſcripti æquale eſt circuli radio. Nam ſi ex centro, C, in ſex triangula dividatur exagonum, æquilatera ſunt triangula illa ob radios CA, CB æquales & angulum ACB = 60°. Quarè ſinguli anguli CAB, ABC ſunt etiam 60°, ac proindè CA = AB.

COR. V. Quodlibet polygonum regulare circulo circumſcribi poteſt, hoc eſt, intra polygonum regulare deſcribi poteſt circulus qui ſingula tangat polygoni latera. Etenim cum latera polygoni regularis circulo inſcripti, totidem ſint cordæ æquales, cordæ illæ a centro æqualiter diſtant (cor. 1. prop. 2. cap. 2.). Quarè ſi ex centro, C, agantur perpendiculares CI, CK, hæ cordas æqualiter divident, atque æquales erunt. Ergò per ſingulas perpendicularium extremitates deſcribi poterit circulus qui ſingula polygoni latera in puncto medio tanget (cor. 1. prop 3. cap. 2.).

COR VI. Hinc polygono regulari dato circulus circumſcribi poteſt. Quæratur polygoni centrum, quo invento, circulus facilè circumſcribitur. Item polygono regulari

gulari circulus facilè inſcribitur; invento polygoni centro, ad latus aliquod demittatur perpendicularis, hæc erit circuli radius.

Viceverſa polygonum regulare circulo dato circumſcribi poteſt. Dividantur 360° per duplum numerum laterum polygoni, ſumptoque arcu iK, qui ſit quoto æqualis, per extremitates K, i, ducatur radius CK agaturque recta indeterminata CB; ad punctum, K, erigatur perpendicularis, DKB, occurrens CB in puncto B, transferatur KB in KD; erit, DB, latus polygoni quæſiti. Simili modo inveniuntur alia latera. Vel etiam radio, CB, deſcribatur circulus & per totam circumferentiam transferatur corda DB atque inſcribatur polygonum DB AG FED, quod erit circulo dato circumſcriptum, ut patet; cum per conſtructionem tot habeantur tangentes æquales & æqualiter diviſæ in puncto contactus, quot ſunt latera in polygono quæſito.

Simili conſtructione circulo dato polygonum regulare inſcribitur. Dividatur numerus 360° per numerum laterum polygoni quæſiti, ſumatur in circulo dato arcus huic quoto æqualis, corda hujus arcus erit latus polygoni; transferatur corda illa per totam circumferentiam, habebitur polygonum quæſitum. Hic

Hic autem diligenter obſervandum eſt per Geometriam elementarem circulo inſcribi poſſe duntaxat triangulum equilaterum, quadratum, pentagonum, pentedecagonum, hoc eſt, figuram quindecim laterum, & polygona regularia in quibus numerus laterum ſe habet in progreſſione geometrica dupla. Ita triangulum æquilaterum præbet polygona regularia laterum 6, 12, 24, 48 &c. quadratum præbet polygona laterum 8, 16, 32, 64 &c. Ex pentagono oriuntur polygona laterum 10, 20, 40, 80 &c. Tandem ex pentedecagono oriuntur polygona laterum 30, 60, 120, 240 &c. Alia polygona ut Eptagonum, Enneagonum, Endecagonum &c. deſcribi non poſſunt geometricè, niſi per conſtructionem æquationum quæ ad ſublimiorem gradum aſſurgunt.

SCOL. Cum polygonum regulare circulo inſcribi & circumſcribi poſſit, quo major eſt in polygono inſcripto vel circumſcripto laterum numerus, eo magis polygonum ad circulum accedit. Itaque augeatur numerus laterum polygoni in infinitum, ita ut differentia inter polygonum & circulum ſit data quavis differentia minor, jam circulus conſiderari poterit tanquam polygonum regulare ex lateribus numero infinitis & infinitè parvis compoſitum.

tum. Hæc circoli conſideratio pendet ex principio omninò evidenti. Si nempè duarum quantitatum A, B, differentia ſit qualibet aſſignabili minor, quantitates illæ velut æquales haberi debent. Etenim ponatur inter illas quantitates differentia aliqua data, jam quantitatum illarum differentia non eſt qualibet aſſignabili minor, quod eſt contra hyp. Quantitas autem quæ ad aliam accedit pro differentia qualibet data minori, hujus alterius quantitatis *limes* appellatur. Methodus autem illa vocatur methodus, *Exhauſtionum*, ſeu *primarum* & *ultimarum* rationum. Hanc methodum quam fuſiùs explicabimus in prima parte phyſices, ubi ſermo erit de extenſionis diviſibilitate, in proximo capite, quantùm hactenus nobis ſatis eſt, breviter exponemus.

CAPUT IV.

De linearum ratione ſeu de proportionibus.

PROP. I. IN TRIANGULIS SIMILIBUS, acb, ACB, (Fig. 13.) LATERA OMOLOGA SUNT PROPORTIONALIA. Ponatur, ab, pars dimidia rectæ AB, agaturque cg, parallela rectæ AB, erit cg = bA. Quod evidens eſt ex linearum pa-

rallelisſmo; ducta enim linea, bg, erit ob angulos inter parallelas æquales & ob latus commune, bg, triangulum bcg, æquale triangulo bgB, & latus cg = bB (cor. 1. prop. 3. cap. præc.). Ergò cg = bB = Ab. Præterea triangnlum Ccg, æquale eſt triangnlo cAb (loco cit.). Ergò Cc = Ac, & Cg = cb = gB. Quarè Ac vel, Cc, erit pars dimidia rectæ AC, ſicut, cb, eſt pars dimidia rectæ CB.

Si, ab, ſit tertia vel quarta aut quælibet alia pars rectæ AB (Fig. 14.) ſimili modo evidens eſt rectas, ac, cb, eſſe tertiam, quartam &c. partem rectarnm, AC, CB. Etenim ex diviſionum punctis b, f, in recta, AB, ducantur bc, fh &c, rectæ BC parallelæ, & eadem ratiocinatione patet triangula Acb, chg, hCi &c, æqualia eſſe triangulo acb.

Si recta, ab, accuratè non contineatur in AB, ſed cum fractione aliqua, E. G. bis cum dimidio, ſimili ratione, ac, bis cum dimidio continebitnr in AC, &, bc, in BC. Etenim factis duobus triangulis Acb, cbg æqualibus triangulo, acb; inter parallelas hf & CB conſtrui poterit trisngulum, Cbi, cnjus latera erunt dimidia pars laterum in triangulo cAb; quod eſt evidens, cum ſit, fB, pars dimidia rectæ Ab (per hyp.) & recta, bi, æqualis

qualis rectæ, fB, ob parallelas, hf, CB.

Tandem ponamus in triangulis, ACB, hCi, rectas AB, hi, eſſe inter ſe *incommenſurabiles*; diviſa intelligatur recta, hi, in partes 100, jam recta, AB, certum continebit partium numerum cum aliquo reſiduo, cum lineæ illæ ſint incommenſurabiles. Rurſus recta, hi, diviſa ſingatur in partes 1000, certum earumdem partium numerum continebit recta AB, ſed cum reſiduo quod priori reſiduo minus eſt, atque ita deinceps minus perperuò fiet reſiduum, quo plures erunt partes. Quarè ponatur parrium numerus infinitus, jam reſiduum fit nullum. Ergò generarim triangula quælibet ſimilia, latera omologa habent proporrionalia.

COR. Numerus quilibet partium in CB erit ad numerum partium in, CA, inter eaſdem parallelas, ut numerus quilibet alius partium in, CB ad numerum parrium in CA, inter eaſdem parallelas. Etenim Ch: hc = Ci: im, & Cb; Ci = hc: im. Irem hc: cA = im: mB & bc: im = CA: mb. Ergò Cb: Ci = hc: im = cA: mB. Quarè CA eſt ad CB ut numerus quilibet partium in CB ad eundem numerum partium in CA.

PROP. II. Duo triangula in quibus latera omologa sunt proportio-

TIONALIA, ÆQUIANGULA SUNT. Si (Fig. 10.) pouatur AC : BC = FE : FD, & AC : AB = FE : ED, æquiangula erunt triangula ABC, DEF. Nam ſi ſuper, EF, conſtruatur triangulum FEG triangulo ABC, æquiangulum, facto ſcilicet angulo GEF = BAC, & angulo GFE = BAC, & angulo GFE = BCA, erit AC : BC = FE : FG : ſed (per Hyp.) AC : BC = FE : FD, ergò FE : FG = FE : FD, ac proindè FD = FG. Similiter ob triangula ABC, FEG, ſimilia, erit AC : AB = FE : FG; ſed (ex Hyp.) AC : AB = FE : ED. Ergò FE : EG = FE : ED, ac proindè EG = ED. Quare triangula duo FED, FEG æquiangnla ſunt & æqualia, ob latus commune FE & latera FD, FG, & EG, ED æqualia (prop. 3. cap. præc.). Sed (per conſtr.) triangulum FEG triangulo ABC eſt æquiangulum, ergò triangulum, FED, ipſi quoque eſt æquiangulum.

COR. I. Si in triangulis ABC, DEF, ſit angulus D = B & præterea DE : DF = BA : BC, erit triangulum DEF, triangulo ABC æquiangulum. Nam ſuper AB capiatur Be = DE, ducaturque, ef, parallela rectæ AC, triangula ABC, eBf ſunt æquiangula; cum ob parallelam, af, angulus feB = A, efB = C, & ob angulum,

gulum, B, communem. Ergò Be : Bf = BA : BC. Sed (ex Hyp.) DE : DF = BA : BC, ergò Be : Bf = DE : DF; at Be = DE, ergò Bf = DF; ac proindè duo triangula Bef, DEF, ſunt æqualia & ſimilia; ſed Bef eſt triangulo ABC, æquiangulum, ergò triangulum DEF eſt æquiangulum triangulo ABC, ac proindè generatim triangula duo quæ duo latera omologa circà æqualem angulum habent proportionalia, ſunt æquiangula.

COR. II. Si recta AD (Fig. 15.) angulum, BAC, bifariam & æqualiter dividat in triangulo BAC, eadem recta latus oppoſitum BC dividit quoque in duas partes BD, DC, lateribus AB, AC, proportionales. Etenim producta recta, CA, per punctum B, agatur BE, recta AD, parallela, triangula BCE, DAC, erunt ſimilia (prop. 1.) ac proindè BD : DC = AE : AC; ſed ob parallelas, angulus BEA = DAC = DAB = ABE; ergò triangulum BAE eſt iſoſcele (cor. 2. prop. 2. cap. præc.); quarè AE = AB, ideòque BD : DC = AB : AC.

COR. III. Si ex angulo recto A trianguli rectanguli BAC, demittatur perpendicularis AD in baſim, BC, quæ angulo recto imminet & *hypothenusa* dicitur, hæc dividet triangulum in duo alia trian-

gula BAD, DAC, inter ſe & triangulo BAC ſimilia. Et quidem triangula BAD, DAC, præter angulum rectum, habent quoque cum triangulo BAC, angulum communnem, ac proindè ſimilia ſunt inter ſe & toti triangulo. Hinc BD : DA = DA : DC, & BD : BA = BA : BC ac tandem DC : CA = CA : CB.

COR. IV. Cum ſit BD : BA = BA : BC, erit $BA^2 = BD \times BC$ (ob productum mediorum æquale producto extremorum). Similiter cum ſit DC : AC = AC : CB, erit $AC^2 = DC \times CB$. Ergò $BA^2 + AC^2 = BD \times BC + DC \times BC = \overline{BD + DC} \times BC = BC \times BC = BD^2$. Quare quadratum hypothenuſæ in triangulo rectangulo æquale eſt quadratis laterum.

COR. IV. Diagonalis quadrati eſt lateri *incommenſurabilis*. Cum enim diagonalis ſit hypothenuſa trianguli rectanguli cujus latera ſunt æqualia, quadratum diagonalis æquale eſt dnplo quadrato lateris. Sed numeris exprimi non poteſt radi quadrati dupli (ex demonſtratis in arithmetica). Ergò ſi latus quadrati numeris exprimatnr, exprimi non poterit diagonalis & contrà.

COR. V. Perpendicularis EO (Fig. 16.) ex circumferentiæ circnli puncto quolibet in diametrum demiſſa, eſt media proportionalis inter dno ſegmenta CO, OL; nam ſi ex

ſi ex puncto E ad diametri extremitates agantur rectæ EC, EL, triangulum CEL, eſt rectangulum in E, ac proindè CO : EO = EO : OL, & $EO^2 = CO \times OL$; recta perpendicularis, BO, dici ſolet *ordinata*; *abſciſſa* autem vocatur pars, CO, diametri inter perpendicularem & circumferentiam comprehenſa.

PROP. III. *Si ducantur in circulo cordæ duæ BA, DC (Fig. 17.) ſe mutuo ſecantes in E, cordarum ſegmenta erunt reciprocè proportionalia.* Si enim ducantur DA, CB, triangula BEC, DAC, ſunt ſimilia ob angulos in E, æquales, atque ob angulos C, A, & B, D, iiſdem arcubus ſubtenſos. Quare AE : DE = CE : BE.

COR. I. Si duæ lineæ EB, EC (Fig.18.) ex eodem puncto extrà circulum ductæ, ad ſuperficiem concavam terminentur, partes externæ EA, EC, rectis integris EB, EC, ſunt reciprocè proportionales. Ductis enim cordis AC, DB, triangula, EbD, EAC, ſimilia ſunt, ob angulum E, communem & angulos B, C eodem arcu AD, ſubtenſos. Ergò EA : ED = Ec : EB.

COR. II. Si recta, EB, ſit ſecans, altera autem Ed, tangens, erit EB : Ed = Ed : EA. nam ductis dB, dA, ſimilia erunt triangula EdB, EdA, ob angulum E

commuuem & angulos EBd, AdE æquales quorum commuuis menſura eſt dimidius arcus Ad. (cor. 3. prop 4. cap. 2.) Ergò angulus dAE = EdB, ac proindè EB : Ed = Ed : EA, boc eſt, taugeus eſt media proportionalis inter rectam totam EB & partem exteruam EA.

COR. III. Hiuc facilè dividitur recta data bifariam, ea conditione ut major pars ſit media proportionalis inter totam rectam & ejuſdem rectæ partem alteram. Nam (Fig. 19) ſuper datæ rectæ AB extremitatem erigatur perpendicularis AE, dimidiæ, AB, æqualem, & ceutro, E, radio AE deſcribatur circulus DAF. Deiude per B & E agatur rectà BF, & centro, B, radio BD deſcribatur arcus DC, hìc occurret rectæ, AB, in puncto quæſito. Etenim ob tangentem, BA, erit BF : BA = BA : BD ac proinde BF - BA : BA = BA - BD : BD. Sed BF - BA = BD = BC; cum ſit FD = BA ut potè duplæ ipſius EA quæ eſt dimidia rectæ AB. Simili modo BA - BD = AC; ergò, ſubſtitutione facta, BC : BA = AC : BC vel BA : BC = BC : AC. In hoc corollario continetur problema quod his verbis proponere ſolent geometræ : *rectam dividere in media & extrema ratione*.

Alia etiam problemata proponi ſolent qua-

qualia ſunt : *tribus datis rectis quartam proportionalem invenire : inter duas rectas invenire mediam proportionalem*. Sed hæc manifeſta ſunt ex præcedentibus.

PROP. IV. *Si duæ figuræ ſimiles in triangula utcumque dividantur per diagonales ex angulis omologis ductas, triangula omologa erunt ſimilia*. Etenim ſint duo polygona ABCDE, FGHIK (Fig. 20.) in quibus angulus A = F, B = G, C = H, D = I, E = K, ſitque præterea AB : FG = BC : GH = CD : HI = DE : IK = EA : KF, ductis diagnnalibus AC, AD, FH, FI, ſimilia erunt triangula ABC, FGH, & ACD, FHI, atque ADE, FIK. Nam cum anguli B, G, æquales ſint & lateribus proportionalibus comprehenſi, ſimilia erunt triangula ABC, FGH, & ADE, FIK. Itaque angulus BAC = GFH, DAE = FIK. Ergò BAE — BAC — DAE = CAD = GFK — GFH — IFK = HFI. Igitur angulus CAD = angulo HFI. Simili modo oſtenditur angulos ACD, FHI & ADC, FIH æquales eſſe. Quarè triangula ACD, FHI ſunt æquiangula.

Viceverſa duæ figuræ quælibet ſimiles ſunt, ſi in triangula æquiangula reſolvi poſſint. Nam ob angulns æquales in triangulis æquiangulis, æquales ſunt anguli hnmologi in unaquaque figura. Quarè cum late-

latera figurarum ſint triangulorum æquiangulorum latera proportionalia, figuræ ſimiles ſunt.

COR. IV. Si dividatur BC in K, latuſque omologum GH in M, in eadem ratione, ita ut ſit BC : GH = LC : MH. Deindè ſi ducantur rectæ duæ ad arbitrium LN, MO quæ angulos CLN, HMO æquales efficiant, vel quæ dividant larera omologa ED, KI in eadem ratione, ita ut ſit ED : KI = DN : IO, erit LN : MO = CD : HI = BC : GH &c. Nam ductis NC, OH, triangula NCD, OHI ſimilia ſunt ob angulos D, I, æquales, lateribus proportionalibus NC, DC, & OI, IH comprehenſos. Quarè CD : HI = CN : HO, & angulus DCN = IHO. Si ergò anguli illi auferantur ex angulis æqualibus DCL, IHM, remanebunt æquales anguli NCL, OHM, ac proindè triangula NCL, OHM ſimilia ſunt, ideòque LN : MO = LC : MH = BC : GH = CD : HI &. Quarè generatim ſi in duobus polygonis ſimilibus ducantur lineæ quæ dividant latera omologa vel angulos omologos in eadem ratione, lineæ illæ erunt proportionales inter ſe, atque etiam eorumdem polygonorum lateribus quibuſcumque omologis.

SCHOL. Linearum rationem jam conſi-

conſideravimus in quantitatibus finitis, ſupereſt ut pauca, quantùm nobis neceſſe eſt, explicemus de ratione quantitatum quas *infinitè magnas* & *infinitè parvas* appellant. Et in primis quidem obſervandum eſt nullam quantitatem in ſe ſpectatam, & ſine noſtro cogitandi modo, aut infinitè parvam eſſe aut ifinitè magnam; ſed magnitudo quælibet in ſe determinata eſt. Et quidem data quavis magnitudine, utcumque parva, vel utcumque magna, alia ſemper minor in primo caſu & alia ſemper major in caſu altero haberi poteſt; nobis enim licet quantitatem exiguam vel ingentem conſiderare, primamque minuere, alteram augere, abſtrahendo animum a quovis limite determinato; priorem quantitatem dicimus *infiniteſimam* vel *infinitè parvam*; quantitatem alteram appellamus *infinitam*, vel *infinitè magnam*; rationem quam duæ quantitates finitæ habent ad ſe invicem, *rationem finitam* vocamus. Patet autem diverſos eſſe infinitorum & infiniteſimorum ordines; licet enim magnitudo aliqua concipiatur infinita vel infiniteſima, ſemper tamen quantitas manet, ac proinde ultra quoſcumque limites augeri poteſt & minui. Si quantitatem aliquam finitam ultra quoſcumque limites minui concipiamus, hanc dicimus infiniteſimam

ordi-

ordinis primi . Si autem quantitas alia ad hanc infiniteſimam habeat rationem quam ipſa infiniteſima habet ad quantitatem finitam , quantitatem hanc dicimus infiniteſimam *ſecundi ordinis* , & ità deinceps. Viceverſa ſi quædam quantitas ſit ad finitam quantitatem , ut quantitas finita ad infiniteſimam ordinis primi , eam dicimus infinitam *ordinis primi* , & ita deinceps ſuperiores infinitorum ordines intelligere licet . Exemplum ſit in circulo cujus diameter eſt ad cordam , ut eſt corda ipſa ad abſciſſam , ac proindè ſi fingatur corda infinite parva primi ordinis, erit abſciſſa infiniteſima ordinis ſecundi.

Ex his patet calculo ſubjici poſſe quantitates infinitas & infiniteſimas . Infinitum hac nota exprimi ſolet ∞ . Quare numerorum ſeries infinita hoc modo repreſentari poteſt . 0 . 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . . . ∞ . Pari modo quantitas quælibet finita concipi poteſt diviſa in partes perpetuo decreſcentes donec perveniatur àd quantitatem infiniteſimam . Talis eſt ſeries , $\frac{1}{1} . \frac{1}{2} . \frac{1}{3} . \frac{1}{4} . \frac{1}{5} \ldots\ldots \frac{1}{\infty}$. Evidens autem eſt quantitatem infinitam finitæ quantitatis additione , vel ſubtractione majorem , vel minorem non fieri ; cum finita quantitas ad quantitatem infinitam , rationem habent

heat qualibet data minorem ; ſimili ratione , quantitas infinitè parva quantitatem finitam augere , vel minu ere non poteſt . Itaque $\infty = \infty \pm 1$, & $1 = 1 \pm \frac{1}{\infty}$. Eodem modo ſi diverſi infinitorum ordines per diverſos exponentes deſignantur, erit $\infty^2 \pm a\,\infty = \infty^2$ & $\frac{1}{\infty} \pm \frac{1}{\infty^2} = \frac{1}{\infty}$. Verùm ſi quantitates ejuſdem generis conſiderentur , ſive infinitæ , ſive infiniteſimæ , ex notione quantitatum illarum manifeſtum eſt eas non ſecus ac quantitates finitas tractari debere ; probe enim recordandum eſt quantitates illas non abſolutè ſed relativè duntaxat , & ſecundùm noſtrum concipiendi modum , eſſe infinitas, vel infiniteſimas . Quare $\infty + \infty = 2\,\infty$, $\frac{1}{\infty} \times 3\,\infty = \frac{3\,\infty}{\infty} = 3$; $\frac{2}{\infty} : \frac{a}{\infty} = \frac{2}{a}$, $\infty \times \infty = \infty^2$; $\frac{\infty^3}{\infty^2} = \infty$; $\frac{\infty^2}{\infty^3} = \frac{1}{\infty}$ $\frac{1}{\infty} \times \frac{1}{\infty} = \frac{1}{\infty^2}$; $\frac{1}{\infty} : \frac{1}{\infty^2} = \frac{\infty^2}{\infty} = \infty$. Ex his multa colligere eſt .

Quantitates infinitæ vel infiniteſimæ ejuſdem ordinis adduntur vel ſubtrahuntur non ſecùs ac vulgares quantitates . Quantitas infinita primi ordinis per quantitatem infinitam ejuſdem ordinis multiplicata, producit quantitatem infinitam ordinis ſecundi.

cundi. At quantitas infinita ordinis cujuſcumque per quantitatem finitam multiplicata producit quantitatem infinitam ejuſdem ordinis. Et generatim quantitas infinita cujuſvis ordinis per aliam quantitatem ordinis cujuſcumque multiplicata evehitur ad illum infiniti gradum cujus exponens eſt ipſa exponentium ſumma. Contraria autem ratione, ſi quantitas infinita ordinis cujuſcumque per quantitatem infinitam ordinis cujuſlibet dividatur, habetur quantitas cujus gradus deſignatur per ipſam exponentium differentiam. At ſi quantitas infiniteſima cujuſlibet gradus per quantitatem infiniteſimam ordinis cujuſcumque multiplicetur aut dividatur, in primo caſu quantitas infiniteſima ad eum deprimetur gradum qui per exponentium ſummam exhibetur; in caſu autem altero quantitas infiniteſima ad eum gradum evehitur qui per ipſam exponentium differentiam repræſentatur, ita ut quantitas infiniteſima per diviſionem fieri poſſit finita atque etiam infinita. Hæc pauca dicta ſint de *primarum & ultimarum rationum* methodo quam quidem ad methodum *exhauſtionum* revocari poſſe intelligitur.

AP-

APPENDIX

De proportionum uſu in triangulorum reſolutione, ſivè de Trigonometria.

I.

EX linearum proportione tota pendet *Trigonometria*, quæ eſt ars reſolvendi triangula; in triangulo autem ſex partès conſiderari poſſunt, nempè tres anguli & tria latera. Huc autem refertur trigonometriæ praxis, ut datis tribus ex ſex partibus trianguli, partes reliquæ inveniantur; ac proinde tres partes datæ conſtituere debent tres primos proportionis terminos, & terminus quartus erit pars quæſita. Verùm quia latera trianguli ſimplicem rationem non habent cum angulis quorum menſura ſunt arcus circuli, angulis vel arcubus circuli ſubſtituuntur lineæ rectæ quæ arcus illos exhibeant, & & trianguli lateribus proportionales ſint. Harum linearum definitiones afferemus, & proprietates demonſtrabimus.

Sit angulus quilibet ACB. (Fig. 21.) ex cujus vertice C, tanquam centro, & radio ad arbitrium ſumpto deſcribatur circulus AHaG. Producatur, AC, in a, eri-

erigaturque in C, perpendicularis CH; evidens eſt angulum BCH vel arcum HB, eſſe *complementum* angnli ACB, vel arcus AB, atque etiam anguli BCa, vel arcus BHa; angulus BCa vel arcns Ba eſt *ſupplementum* angnli ACB, vel arcus, AB, & viceverſa BA eſt *complementum* ipſius HB, & *ſupplementum* ipſius aB. Recta, BD, ex radii extremitate B, ad radium, CA, perpendiculariter ducta, dicitur *ſinus* arcus AB, vel anguli ACB. Recta AE ex radii extremitate, A, perpendiculariter ducta & radio alteri occurrens in E, vocatur *tangens* arcus, AE; recta autem, CE, ejuſdem arcus *ſecans* appellatur. Pars, AD, radii inter arcum & ſinum comprehenſa dicitur ſinus *verſus* arcus AB. Perpendicnlaris BI dicitur *ſinus complementi* arcus AB; perpendicularis HK *tangens complementi*; CK, *ſecans complementi* & HI *ſinus verſus complementi* arcus AB. Compendii ergò ſinus complementi, tangens complementi &c. dicuntur *Coſinus*, *Cotangens*, *Coſecans*, *Coſinus verſus*. Brevitatis cauſa ſcribuntur R pro radio; ſin. pro ſinu; tang. pro tangente; ſin. v. pro ſinu verſo.

II. Ex his definitionibus multa colliguntnr ... 1°. Sinus, coſinns, tangens, cotangens &c. anguli obtuſi BCa, ſunt otiam ſinus, coſinus &c. anguli acuti ACB, qui

qui eſt anguli obtuſi ſupplementum. Nam ex radii alterutrius extremitatibus B, vel a, demitti non poteſt perpendicularis quæ non cadat in radium alterum productum; tales ſunt perpendiculares BD, ad; ſimiliter tangens alia eſſe non poteſt quam ae; ſed ob triangula aCD, BCD, & Cae, CAE, æqualia, habetur ad = BD, ae = AE. Cum autem ſit arcus BH complementum arcus aB, atque etiam arcus AB, evidens eſt BI eſſe coſinum arcus aB & HK illius cotangentem ... 2°. Sinus, BD, arcus AB eſt dimidium cordæ BG, arcum duplum, BAG, ſubtendentis. (Prop. 2. cap. 2.) ... 3°. Sinus creſcunt creſcentibus angulis a, 0°, uſque ad 90°, & eodem modo decreſcunt a 90° uſque ad 180°. ... 4°. Sinus arcus 30° dimidio radio æqualis eſt; eſt enim radius æqualis cordæ arcus 60° (cor. 4. prop. 5. cap. 3.) & ejuſdem arcus ſinus eſt dimidia corda arcus dupli. Itaque in triangulo rectangulo latus oppoſitum angulo 30° eſt dimidia hypothenuſa hujus trianguli. Nam ſi ACB = 30°, erit BG = BC, & BD = ½ BC ... 5°. tangentes creſcunt, creſcentibus angulis a, 0°, uſque ad 90°, ità ut tangens arcus grad. 90, ſit infinita; nam radius, CH, in angulo recto, HCA, non poteſt concurrere cum tangente ... 6°. Tan-

 gens

gens arcns 45°. æqualis eſt radio; nam ſi angulus ACB ſit 45°, triangulum rectangulum CAE erit iſoſceles, & AE = AC ..... 7°. Sinus verſus AD arcns qui minor eſt 90°, æqualis eſt differentiæ inter radinm CA & coſiuum CD = BI. Prætereà coſinus verſus HI eſt differentia inter radium CH & ſinum CI = BD; at ſinus verſus ſupplementi nempè, Da, æqualis eſt ſummæ radii & coſinus ... 8°. ob triangula rectangula ſimilia CDB, CAE, CIB, CHK, erit CA : CD vel BI = AE : BD, nempè radius eſt ad coſinum ut tangens ad ſinnm. Deindè hæc alia habetur analogia, CH : CI vel BD = HK : IB, hoc eſt, radius ad ſinnm ut cotangens ad coſinum. Tandem AE : CA = CH vel CA : HK; hoc eſt, tangens ad radinm ut radius ad cotangentem ... 9°. Ex præcedentibus analogiis derivantnr formulæ quarum ope ſinus ſubſtitnuntnr tangentibus & viceverſa. Sit R = 1, erit Sin. = Coſ. × Tang. $= \frac{\text{Cos.}}{\text{Cot.}}$, Coſ. = Sin. × Cot. $= \frac{\text{Sin.}}{\text{Tang.}}$, Tang. $= \frac{\text{Sin.}}{\text{Cos.}} = \frac{1}{\text{Cot.}}$; Cot. $= \frac{\text{Cos.}}{\text{Sin.}} = \frac{1}{\text{Tang.}}$, Cot. A × Tang. A = 1 = Cot. B × Tang. B ... 10°. In omni triangulo ſinus angulorum ſunt ut latera angulis op-

oppoſita. Etenim triangulum circulo inſcribatur, ſingula latera ſunt cordæ arcus dupli qui eſt menſura anguli oppoſiti. Quarè dimidium latus eſt ſinus anguli oppoſiti; ſed ſemiſſes ſunt inter ſe ut tota, ergò latera ſunt ut ſinus angulorum oppoſitorum. Hinc cum ſinus anguli recti ſit radius & latus oppoſitum ſit hypothenuſa, erit in triangulo rectangulo radius ad hypothenuſam ut ſinus anguli unius acuti ad latus eidem angulo oppoſitum... 11°. In triangulo rectangulo coſinus anguli unius acuti eſt ſinus anguli alterius; ergò ſinus anguli unius acuti eſt ad ſuum coſinum ut latus huic angulo oppoſitum eſt ad latus alterum; ſed ſinus eſt ad coſinum ut tangens ad radium; ergò in triangulo rectangulo, tangens anguli unius acuti eſt ad radium ut latus huic angulo acuto oppoſitum eſt ad latus alterum. 12° In triangulo quolibet ABC (Fig. 21.) hæc ſemper habetur analogia: majus latus AC eſt ad ſummam duorum aliorum laterum AB + BC ut eorumdem laterum differentia AB — BC ad differentiam ſegmentorum AE, CE, quæ fiunt ducta ex angulo majori, B, in majus latus AC, perpendiculari BE; nam ſi ex anguli vertice B, tanquam centro & radio qui ſit minori lateri æqualis BC, deſcribatur circulus GCD, producto latere AB

in G, erit $AG = AB + BC$, & $AP = AB - BC$, atque ob $CE = ED$ erit $EA - CE = AD$, ac tandem $AC : AG = AP : AD$ … 13°. Iu omni triangulo ABC, ſumma duorum quorumcumque laterum $AB + BC$ eſt ad illorum differentiam $AB - BC$ ut tangens ſemiſummæ duorum angulorum A, C, qui his lateribus opponuntur, ad tangentem ſemidifferentiæ eorumdem angulorum. Etenim ſit P, ſemiſumma angulorum A, C, & Q illorum ſemidifferentia, erit angulus major $C = P + Q$ & minor $A = P - Q$. Jam (ex dem.) $AB : BC = \text{Sin. } C : \text{Sin. } A = \text{Sin. } \overline{P + Q} : \text{Sin. } \overline{P - Q} = \text{Sin. } P \times \text{Coſ. } Q + \text{Coſ. } P \times \text{Sin. } Q : \text{Sin. } P \times \text{Coſ. } Q - \text{Coſ. } P \times \text{Sin. } Q$. Ergo $AB \times \text{Sin. } P \times \text{Coſ. } Q - AB \times \text{Coſ. } P \times \text{Sin. } Q = BC \times \text{Sin. } P \times \text{Coſ. } Q + BC \times \text{Coſ. } P \times \text{Sin. } Q$; vel $\overline{AB - BC} \times \text{Sin. } P \times \text{Coſ. } Q = \overline{AB + BC} \times \text{Coſ. } P \times \text{Sin. } Q$; quare dividendo per Coſ. $P \times$ Coſ. Q; ſactaque rednctione habebitur

$$\overline{AB - BC} \times \text{Sin. } P = \overline{AB + BC} \times \frac{\text{Sin. } Q}{\text{Cos. } Q};$$

ſed $\frac{\text{Sin.}}{\text{Cos.}} = \text{tang.}$ Ergò $\overline{AB - BC} \times \text{Tang. } P = \overline{AB + BC} \times \text{Tang. } Q$. Quarè $AB + BC : AB - BC = \text{Tang. } P : \text{Tang. } Q = \text{Tang. } \frac{A + C}{2} : \text{Tang. } \frac{A - C}{2}$.

III. His

Google

III. His principiis univerſa innititur trigonometria; & quidem in triangulorum reſolutione vel dantur tria latera, vel duo tantum & angulns, vel duo anguli & latus unum. Porro datis in triangulo, tribus quæ jam diximus, reliqua iuveniuntur per hactenùs demonſtrata; at monendum eſt datis tribus angnlis dnntaxat, inveniri tantùm rationem laterum quæ ſunt ut ſinus angulorum oppoſitorum; minimè autem iuvenitur eorum valor *abſolutus*, cum infinita poſſint conſtrui triangula ſimilia inæqualia. Neque etiam ſine obſervatione prætermittendus eſt caſus in quo dantur duo latera & angulus alterutri lateri oppoſitns. Caſus ille eſt ambiguus, & duas ſolntiones poteſt admittere; cnm (ex dem.) ſinus anguli acuti ſit quoque ſinus complementi ad dnos rectos. Quarè nt tollatur ambiguitas, nota ſit oportet anguli ſpecies, hoc eſt, notnm eſſe debet an angulus ſit acutus vel obtuſus; atque hinc etiam patet triangula duo utcùmque inæqualia eſſe poſſe, quamvis habeant latera duo æqualia & æqualem angulum eidem lateri oppoſitnm. In omnibus trigonometriæ libris reperiuntur ſinuum & tangentium tabulæ. Quamvis autem ex hactenùs demonſtratis manifeſtum ſit quo artificio conſtruantur, id tamen magis

magis explicabimus. Dato ſinu grad. 30 (per num. præc.) inveniri poſſunt ſinus grad. 15; deinde $7^{\circ}\frac{1}{2}$ poſtèa $3^{\circ}\frac{3}{4}$ & ità deinceps ſinuum ſemiſſes, progrediendo uſque ad 12^{am} operationem, nempè uſque ad 52″ 44‴ 3⁗$\frac{3}{4}$, qui quidem ſinus ſine errore ſenſibili cum arcu confunditur. Quia verò ſinus illi minimi ſunt arcubus proportionales, dici poterit: ut arcus ille eſt ad ſuum ſinum ità arcus 1′ eſt itidem ad ſuum ſinum. Dato autem ſinu arcus 1′ invenientur ſinus arcuum 2′ 3′ 4′ & ità deinceps uſque ad 30°. Tandem a 30° uſque ad 60° & a 60° uſque ad 90°, progredi licebit; quo facto tangentes ad calculum revocare jam promptum erit. Itaque tota difficultas in ſinuum calculo poſita eſt; rem ergo exponemus.

I. Si in arcu quolibet AB (Fig 21) detur ſinus aut coſinus, ſinuſverſus aut coſinuſverſus, ex uno duntaxat dato, tria reliqua inveniuntur. Nam $CD = \sqrt{CB^2 - BD^2}$ & $Coſ. = \sqrt{R^2 - Sin^2}$ prætereà $DA = CA - CD$ & Sin. verſus $= R -$ Coſ. tandèm $HI = CH - CI$ & Coſ. verſus $= R -$ Sin.

II Initis calculis in arcu quolibet, pro dimidio vel duplo arcu calculus facilè inſtitui poteſt. Nam (Fig.23) ducta corda, BA, & ex puncto, C, demiſſa perpendicu-

diculari CE, datiſque BD, DA, erit $BA = \sqrt{BD^2 + DA^2}$. Quarè FA vel Sin. $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\text{Sin.}^2 + \text{Sin. verſ.}^2}$. Et $CF = \sqrt{CA^2 - AF^2}$. Ergò $\text{Coſ.}\frac{x}{2} = \sqrt{RR - \text{Sin.}^2\frac{x}{2}}$. Præterea ſi habeatur, AE, tanquam arcus datus, ſimilia erunt triangula FCA, DBA; quarè CA : CF = AB : BD, vel R : Coſ. arc = 2. Sin. arc : Sin. arcus dupli.

III. Datis ſinubus BD, KL, duorum arcuum AB, KB habetur ſinus KM illorum ſummæ (Fig. 24) vel illorum differentiæ (Fig. 25) Etenim datis CD, CL, erit CB : CL = BD : LP vel OM; ergò $OM = \text{Sin.}\ \frac{AB \times \text{Cos KB}}{R}$, præterea ob triangula rectangula ſimilia, KOL, OLQ, CMQ, CBD (Fig. 24) & KOL, KMQ CQL, CBD (Fig. 25) erit in triangulis KOL, CBD, CB : CD = KL : KO. Quarè $KO = \frac{\text{Sin. KB} \times \text{Cos. AB}}{R}$. Hinc facto R = 1 erit KM vel Sin. BK + AB = Sin. BK × Coſ. AB ± Sin. AB × Cos. KB.

IV. Sit arcus AB 30° (Fig. 26) & BF = BK ob triangula rectangula ſimilia SIF, SQG, erit angulus IFS = GQS = BCA = 30°. Ergò angulus KFC = 30°. Quarè $CK = \frac{1}{2}FK = IK = FI$. Sed $FK^2 - GK^2 = FG^2$,

$= FG^2$, vel $4IK^2 - IK^2 = FG^2$. Ergo $3IK^2$, vel $IK^2 \times 3 = FG^2$. Quare $IK \times \sqrt{3} = FG$, & $IK \times \sqrt{3} + KM = FN$; hoc eſt, ſinus KM arcus KA minoris ſcilicet quam 30° & ſinus KI differentiæ ſcilicet inter hunc arcum & 30° per $\sqrt{3}$ multiplicatus ſimul ſunt æquales ſinui FN arcus FA qui tantò major eſt 30 arcu 30° quantò arcus, KA, minor eſt.

V. Ob arcum $FI = GK$, erit $FT + GK = KO$, nempè ſinus FT, arcus, HF, minoris quam 60° & ſinus FI differentiæ ſcilicet inter hunc arcum & 60° ſimul æquantur ſinui KO arcus HK qui tantò major eſt arcu 60° quanto FK minor eſt. Ita Sin. 55° + Sin. 50° = Sin. 63°. Itaque demonſtravimus principia quorum ope formari poſſunt ſinuum & tangentium tabulæ. Illæ autem tabulæ commoditatis ergò per logarithmos conſtruuntur cujus quidèm conſtructionis ratio ex logarithmorum doctrina jam explicata intelligitur.

SE-

SECTIO II.

De Geometria ſuperficierum.

CAPUT I.

De præcipuis planarum ſuperficierum proprietatibus.

PROP. I. TRIA PUNCTA QUÆ IN EADEM RECTA NON JACENT, PLANI POSITIONEM DETERMINANT. Id patet ex definitione ipſius plani. Et quidem per tria puncta duci poteſt planum, quod evidens eſt; illud verò planum unicum eſſe manifeſtum eſt; ponamus enim planum aliud quod cum primo in tribus punctis congruat, in aliis autem ab ipſo deflectat, jam eadem linea recta quæ primum planum tangeret, alteri plano aptari perpetuò non poſſet, neque ſecunda ſuperficies illa foret omnium intrà eoſdem terminos ductarum breviſſima; quod eſt contrà definitionem plani. Ergò per tria puncta unicum planum duci poteſt ac proindè conſtans eſt ac determinata poſitio plani, per data tria puncta tranſeuntis.

COR. I. Duæ rectæ ſe invicem ſecantes, ſunt in eodem plano. Nam punctum inter-

ſectionis & punctum quodlibet aliud in binis lineis pro arbitrio ſumptum, tria ſunt puncta in directum non poſita quæ proindè determinant poſitionem plani in quo jacent duo utriuſque lineæ puncta ac proindè & totæ binæ lineæ (ex def.)

COR. II. Si duæ rectæ jacentes in eodem plano tertia recta ſecentur, recta ſecans in eodem quoque jacebit plano. Nam duo ejuſdem lineæ puncta, duæ ſcilicet interſectiones, ſunt in eodem plano. Si autem ponamus duas rectas ſe mutuò ſecare, patet in hoc caſu demonſtrationem non valere, niſi tertia linea ſecans extrà punctum interſectionis tranſeat; alioquin unicum haberetur punctum quod rectæ poſitionem non determinat.

COR. III. Duorum planorum interſectio eſt linea recta. Nam duorum planorum interſectio eſt linea cujus ſingula puncta jacent in utroque plano. Patet autem tria puncta duobus planis communia eſſe non poſſe, niſi jaceant in directum. Cum enim tria puncta quæ non ſint in eadem recta poſitionem plani determinent, ſi tria puncta in directum non poſita duobus planis communia eſſe poſſent, jam tria puncta poſitionem plani non determinarent. Quarè planorum duorum interſectio eſt linea recta.

COR. IV.

COR. IV. Recta ad planum perpendicularis, inſiſtit quoque perpendiculariter ad rectas ſingulas in eodem plano jacentes & per extremitatem perpendicularis tranſeuntes. Etenim ponamus rectam illam ad planum perpendicularem, non inſiſtere perpendiculariter ad aliquam ex prædictis lineis, jam linea illa infrà planum deprimitur vel attollitur ſuprà idem planum, ac proindè non jaceret in eodem plano (quod eſt contrà hypoth.)

COR V. Duæ rectæ ad idem planum perpendiculares vel æqualitèr inclinatæ ſunt inter ſe parallelæ, & contrà. Etenim rectarum illarum extremitates communi recta in plano jungantur, duæ illæ lineæ ad planum perpendiculares vel æqualitèr inclinatæ, erunt quoque perpendiculares vel æqualitèr inclinatæ ad eandem lineam jungentem; eſt enim in eodem plano. Quarè (ex parallelarum def.) rectæ illæ erunt parallelæ & viceverſa.

PROP. II. DUO PLANA SIBI MUTUÒ INCLINATA, EASDEM HABENT PROPRIETATES QUAS IN RECTIS AD SE INVICEM INCLINATIS DEMONSTRAVIMUS. Ponamus planum aliquod, A, immobile in quo jaceat planum aliud, B, lineis rectis terminatum, qualia ſunt polygona rectilinea; hæc duo plana ut potè omni craſſitie deſti-

tuta in unum coaleſcunt planum. At ſi planum, B, revolvi intelligatur circa latus aliquod plano, A, fixum perpetuò manens, totum plani motum ſibi facile quiſque repræſentabit. Er quidem 1°. ab ipſo motus initio nihil duobus planis manebit commune præter rectam circa quam planum, B, revolvitur, quæ proindè eſt utriuſque plani inrerſectio ..... 2°. planum illud ſingulos percurret inclinationis gradus, ſi tandiù convertatur, donec ad oppoſitam plani, A, partem perveniat .... 3°. planum revolvens plano immoto fiet perpendiculare, ubi ad eum pervenerit ſitum in quo non magis pendeat ex una parte quam ex alia. ... 4°. Singulos inclinationis gradus metietur arcus circuli cujus centrum perpetuò manebit in communi planorum interſectione. Quia verò centrum in ipſo circuli plano jacet, neceſſum eſt hujus arcus centrum eſſe in linea recta cujus revolutione generatur ipſum arcus planum.... 5°. Si concipiatur linea quædam ſublimis cui perpendiculariter affixa ſit recta alia, hæc recta planum deſcribet, intercadùm linea ſublimis circà ſeipſam convertitur in eodem perpetuò manens loco. Si autem duæ lineæ ſibi invicem non forent perpendiculares, jam figura revolvendo deſcripta plana non foret;

foret; ſed ex una parre convexa & ex altera concava, ut patet. Quarè ex ipſa plani formatione evidens eſt revolutione rectæ planum deſcribi non poſſe, niſi recta revolvens ſit ad lineam in qua revolvitur perpendicnlaris .... 6°. Centrum arcus in quo ſumuntur gradus inclinationis plani unius ad alıud, poſitum eſt in perpendiculari ex puncto quolibet arcns ad planorum interſectionem ducta. Quarè ſi deſcribatur ſemicirculns cujus centrum ſit in linea duobus planis communi & cujus planum ſit ad planum immotum perpendiculare, per hujus ſemicirculi gradus metiri licebit omnes plani mobilis inclinationes. Quarè generatim plana duo ad ſe invicem inclinata eaſdem habent proprietates quæ in mutua linearum inclinatione demonſtrantur.

COR. I. Planum plano occurrens vel duos angulos rectos facit vel duobus rectis æquales (Prop. 1. cap. 1.)

COR. II. In planorum interſectione æquales ſunt anguli ad verticem oppoſiti. (Cor. 2. Prop. 1. cap. 1.)

COR. III. Si plana quotlibet eandem habeant commnnem interſectionem, ſummæ angnlorum omnium eſt 360°. (Cor. 1. Prop. 1. cap. 1.)

COR. IV. Ex puncto dato extra pla-

 num

num vel intrà planum, unica perpendicularis ad planum duci poteſt (Cor.4. Prop.1. cap. 1.)

COR. V. Diſtantia puncti alicujus a plano dato, eſt perpendicularis ex puncto dato ad planum ducta (ex def.)

COR. VI. Planum ſecans duo vel plura plana parallela efficit angulos alternos externos æquales, item æquales angulos alternos internos. Præctereà angulus internus alterius interni ſupplementum eſt, atque etiam angulus externus eſt ſupplementum alterius (Prop.2. cap.1.)

COR. VII. Si duo aut plura plana parallela alio plano ſecentur, communes interſectiones erunt parallelæ. Si enim non ſint parallelæ, ſibi occurrere poſſunt ac proindè & plana ipſa in quibus hæ lineæ jacent, ideòque plana non forent parallela, quod eſt contrà hyp.

CAPUT II.

De Superficierum menſura.

PROP. I. SUPERFICIES PARALLELOGRAMMI RECTANGULI ÆQUALIS EST PRODUCTO EX BASI IN ALTITUDINEM. Sit parallelogrammum rectangulum ABCD (Fig. 26.) cujus altitudo, AD, certum con-

contineat pedum numerum. E G. 7, baſis autem, AB, octo contineat; diviſum intelligi poterit parallelogrammum in 7 ſuperficies ut, DM, quæ ſingulæ continent octo minores ſuperficies quadratas, ſive octo pedes *quadratos*, ut vocant. Quarè babebitur parallelogrammi totius ſuperficies, ſi octo pedes quadrati qui in prima ſuperficie continentur toties ſumantur quot ſunt æquales ſuperficies ut DM, ac proindè ſuperficies tota parallelogrammi erit 7×8, nempe 56 pedum quadratorum. Evidem eſt in hac demonſtratione fingi poſſe alium quemlibet partium numerum, atque eadem valet demonſtratio etiamſi altitudo & baſis parallelogrammi ponantur *incommenſurabiles*, ut patet ex Prop. 1. cap. 4.

COR. I. Si parallelogrammum, BD, per diagonalem dividatur, habebuntur triangula duo rectangula æqualia, quorum proindè ſuperficies ut potè dimidia parallelogrammi, erit dimidium productum ex baſi in altitudinem.

Eadem eſt demonſtratio pro triangulo quolibet etiam non rectangulo. Sit enim triangulum CAB (Fig. 27), non rectangulum; ex puncto A, demittatur perpendicularis, AD, compleaturque rectangulum FCBE, erit triangulum, CAD, di-

 mi-

midium rectanguli FACD, & triangulum, DAB, dimidium rectanguli, DABE. Quarè, ut ante, ſuperficies trianguli eſt dimidium productum ex baſi in altitudinem.

Idem patet etiamſi perpendicularis, EB, trianguli, CED, cadat extrà baſim. Nam triangulum, DEB, eſt dimidium rectanguli DAEB, & triangulum, CEB, eſt dimidium rectanguli CFEB; ergò triangulum CED, ſeù CEB — DEB $= \frac{1}{2} CB \times AD - \frac{1}{2} DB \times AD = \frac{\overline{CB - DB}}{2} \times AD = \frac{1}{2} CD \times AD$; ac proindè trianguli cujuſlibet ſuperficies æqualis eſt dimidio producto ex baſi in altitudinem.

COR. II. Cum parallelogrammum quodlibet dividi poſſit in duo triangula æqualia quæ ipſam habent parallelogrammi baſim eandemque altitudinem, patet generatim ſuperficiem parallelogrammi cujuſcumque eſſe productum ex baſi in altitudinem.

COR. III. Quotlibet triangula ideòque etiam quotlibet parallelogramma inter eaſdem parallelas & ſuper eadem vel æquali baſi conſtituta, ſunt æqualia. Ergo etiam triangula inter eaſdem parallelas cum parallelogrammis conſtituta & ſuper eadem baſi ſunt parallelogrammorum dimidia ac pro-

proindè etiam inter ſe æqualia. Ex hac propoſitione pendet vulgaris demonſtratio theorematis quod alio modo jam demonſtravimus; nempè *quadratum hypothenuſæ in triangulo rectangulo, æquale eſſe quadratis laterum*. Hanc verò geometriæ fæcunditatem totiuſque doſtrinæ geometricæ conjunctionem variis exemplis Tyronibus ſæpè oſtendere debet peritus magiſter.

COR. IV. Cum triangula ſint ut dimidium productum ex baſi in altitudinem, erunt etiam ut productum totum; hoc eſt, triangulorum ſuperficies ſunt in ratione compoſita baſium & altitudinum; ac proindè, ſi baſes fuerint æquales, triangula erunt inter ſe ut altitudines; Si autem altitudines fuerint æquales, erunt inter ſe ut baſes.

COR. V. Si altitudo trianguli unius ſit ad trianguli alterius altitudinem ut baſis ſecundi trianguli ad baſim primi, hoc eſt, ſi baſes ſint in ratione inverſa altitudinum, triangula ſunt æqualia. In hoc enim caſu habetur proportio in qua productum extremorum æquale eſt producto mediorum, hoc eſt, productum ex altitudine primi trianguli in baſim æquale eſt producto ex altitudine ſecundi trianguli in ſuam baſim, ideòque triangula ſunt æqualia; & viceverſa ſi triangula ſunt æqualia, erunt baſes

baſes in ratioue inverſa altitudinum.

COR. VI. In triangulis ſimilibus ſuperficies ſunt in ratione duplicata laterum omologorum. Etenim cum triangula ſint in ratione compoſita baſium & altitudinum, atque (ex hyp.) ſint ſimilia, loco baſis ſubſtitui poterit altitudo & contrà. Quarè triangula ſimilia ſunt ut quadrata latornm omologorum.

PROP. II. SUPERFICIES POLYGONI REGULARIS ÆQUALIS EST DIMIDIO PRODUCTO EX PERPENDICULARI PER CENTRUM POLYGONI AD LATUS UNUM DEMISSA, IN POLYGONI CIRCUMFERENTIAM. Etenim triangula omnia in quæ reſolvitnr poligonnm regulare ſunt æqualia (Prop.5. cap. 3.) ideòqne eandem babent altitudinem, CI, (Fig. 11.) Sed ſuperficies polygoni regularis $= CI \times \frac{1}{2} AB + CI \times \frac{1}{2} BD + CI \times \frac{1}{2} DE$ &c. Quarè cum $AB + BD + DE$ &c., ſit tota polygoni peripheria, patet ſuperficiem totam polygoni æqualem eſſe producto ex altitudine CI in dimidiam polygoni peripheriam, vel dimidio producto ex peripheria polygoni in altitndinem.

COR. I. Superficies circuli æqnalis eſt dimidio producto ex radio in circumferentiam.

COR. II. Si ex centro circnli ad circumferen-

ferentiam ducantur radii duo, pars circuli dnobns radiis & arcu comprehenſa *Sector* dicitur; evidens autem eſt hujus ſectoris ſuperficiem æqualem eſſe dimidio producto ex arcu iu radium.

PROP. III. FIGURARUM SIMILIUM SUPERFICIES SUNT IN RATIONE DUPLICATA LATERUM OMOLOOORUM. Etenim triangula omologa in quæ redncuntur figuræ ſimiles, ſunt earumdem figurarum partes ſimiles (Prop. 4. cap. 4.), ac proindè triangula omologa erunt ut polygona tota; ſed triangula ſimilia ſunt iu ratione duplicata laterum omologorum; ergò in eadem etiam ratione ſunt figuræ ſimiles quælibet.

COR. I. Superficies circulorum ſunt ut quadrata radiorum vel diametrorum.

SCOL. Ex propoſitionihus præcedentibns nota quidem eſt ratio quam habent variæ circulorum peripheriæ atque etiam illornm ſuperficies ad ſnos radios; at ratio accurata inter circuli circumferentiam illiùſque diametrum uondùm definiri potuit, ita nt magnitudine diametri numeris expreſſa, numeris accuratè exprimi non poſſit circuli circumferentia, ac proindè nec ipſa eirculi ſuperficies. In hoc ſenſu intelligi debet quod vulgò dicitur, noudùm ſcilicèt inventam eſſe circuli *quadraturam*, quod

quod quidem *quadraturæ* nomen adhiberi ſolet eò quod *quadratum* ſit cujuſlibet ſuperficiei communis menſura, ut jam demonſtravimus. Eò igitur reducti ſunt geometrarum conatus ut ad illam quadraturam proximè & quantùm voluerint accedant, haud tamen accuratè non attingant. Qua ratione autem hanc *approximationem* tentare ſoleant Geometræ ex ipſis elementis licebit intelligere. Diviſus concipiatur circulus primò in quatuor partes æquales, deindè in 8, in 16, in 32, in 64, in 128 &c. prout cuique libuerit, & concipiamus per ea diviſionum puncta tangentes & cordas reſpectivè ductas, habebuntur polygona duo quorum unum *inſcriptum* circulo, alterum autem *circumſcriptum*; quæ quidem ambo conſtant triangulis æqualibus. Porrò, per methodos explicatas, in his triangulis haberi ſemper poterunt baſes quæ in primo caſu ſunt circulorum cordæ, in altero autem tangentes, ac proindè omnium quoque cordarum & tangentium ſumma innoteſcet, hoc eſt, perimeter polygoni inſcripti quæ circuli circumferentia proximè minor eſt, & polygoni circumſcripti perimeter quæ proximè major eſt, ita ut defectus vel exceſſus, quantùm cuique placuerit, tenuis ſit & intrà anguſtiſſimos limites contrahatur. Hac me-

tho-

thodo archimedes invenit diametrum ad peripheriam eſſe in ratione 7, ad 22 ita ut exiguus omninò ſit peripheriæ ſic inventæ exceſſus ſuprà veram. Hæc eadem ratio ſubtiliùs ab aliis quæſita eſt & ſtatuitur ut 1 ad 3, 14159265 &c. perductis decimalibus numeris uſque ad notas 127; quæ quidem *approximatio* eſt ferè infinita; ſed omnium vulgatiſſima & elegantiſſima ratio diametri ad peripheriam ea eſt quam exprimunt numeri 113, & 355. Quarè data circuli diametro habebitur peripheria, ſi hæc fiat proportio 113 ed ad 355 ut diamater data ad peripheriam quæſitam; hæc multiplicetur per quartam diametri partem, habebitur ſuperficies circuli ſivè, ut vocant, *area*. Hæc pauca dicta ſint de ratione diametri ad peripheriam, ſivè de quadratura circuli quam audacter ſe inveniſſe non rarò jactitant viri geometriæ imperiti qui ipſum quidem quæſtionis ſtatum ut plurimùm non intelligunt.

Simili methodo figura quælibet curvilinea generatim dividi poteſt in partes rectilineas; aliquando per geometriam ſublimiorem figuræ curvilineæ area accuratè haberi poteſt, ſed commodiſſima & generalis eſt praxis qua figuræ curvilineæ circumferentia in minimas partes & *phy-*

ſicè

ſicè rectilineas dividitur & deindè figuræ totius area inveſtigatur, ut fieri ſolet in polygonorum menſura.

Porrò dum ſuperficierum magnitudinem *pedibus quadratis*, aut alia qualibet menſura exprimimus, id nequaquam haberi debet tanquam contrarinm iis quæ de numerorum *concretorum* multiplicatione demonſtravimus in arithmetica; non enim pedes per pedes mnltiplicantnr. Ita dum parallelogrammi ſuperficies invenitur, mnltiplicando baſim per altitndinem, hac operatione hoc unum ſignificant Geometræ; ſi nempè habeantnr parallelogramma duo, adbibeaturque quantitas *linearis* quælibet, a, pro communi baſium & altitndinum menſura, & ſit, B, numerus integer aut fractus, rationalis vel irrationalis exprimens quoties baſis parallelogrammi nnius contineat quantitatem, a; atque H, exprimat quoties altitudo ejuſdem parallelogrammi eandem contineat menſuram. Item ſit, b, numerus exprimens quoties menſura, a, contineatur in baſi alterius parallelogrammi; b, autem exponat quoties altitudo parallelogrammi ejuſdem contineat menſnram a, parallelogrammorum illornm ſnperficies erunt inter ſe ut productum ex duobns numeris B, H, ad productum ex numeris duobus, b, h; hæc

eſt

eſt genuina hujus operationis notio; quarè dum dicitur parallelogrammi ſuperficiem æqualem eſſe producto ex baſi in altitudinem, *æqualitas* propriè dicta intelligi non debet, ſed mera proportio. Hæc eadem obſervatio ad phiſicam ſæpè transferri debet, ubi de ſpatii, velocitatis & temporis menſura ſermo eſt.

SECTIO III.

De Geometria Solidorum.

CAPUT I.

De Solidorum geneſi & proprietatibus.

PROP. I. SOLIDORUM RECTILINEORUM GENESIM EXPLICARE. Si figura rectilinea, AGR, ſuprà immotam rectam, AE, (Fig. 28) motu ſibi ſemper parallelo feratur; ſolidum AGROFE, indè genitum *priſma* dicitur; & *rectum* vocatur, ſi, AE, deſcribenti plano recta fuerit, ſin minùs, *obliquum*. Si planum deſcribens fuerit parallelogrammum, ſolidum indè genitum dicitur *parallepipedum*. Si autem planum deſcribens ſit quadratum, ſolidum *cubus* nuncupatur. Baſis ſolidi ſeu planum deſcribens poteſt eſſe poly-

polygonum quodlibet, & ſolidum indè genitum *priſmatis* nomen retinet, ſi è ſingulis polygoni angulis extrà planum conſurgant lineæ æquales & parallelæ terminantes rectilineam ſolidi faciem. At ſi rectæ lineæ in apicem coeunt, ſolidum *pyramis* dicitur (Fig.29).

COR. I. Priſma igitur oppoſita latera, AGR, EFO, æqualia habet, ſimilia & parallela; cum AGR, fluendo per AE, motu ſibi ſemper parallelo tandem congruat cum EFO. Prætereà dum planum, AGR, motu ſibi parallelo deſcribit priſma, AGROFE, latera AG, GR, RA, motu ſibi ſemper parallelo deſcribunt parallelogramma AEFG, GFOR, ROEA, ac proindè priſma tot parallelogrammis circumcircà terminatur quot ſunt latera plani deſcribentis.

COR. II. Parallepipedum ſex parallelogrammis terminatur; cubus autem ſex quadratis æqualibus. Nam præter facies quatuor parallelo laterum motu genitas, ſunt etiam facies duæ oppoſitæ parallelo baſis motu deſcriptæ. Illa autem baſis in primo caſu eſt parallelogrammum, in altero autem quadratum.

COR. III. In pyramide ſi omnia latera baſis ſint æqualia inter ſe & latera rectilinea ipſius pyramidis paritèr inter ſe æqualia,

lia, erunt omnes ſacies triangula iſoſcelia æqualia.

COR. IV. Quævis ſectio priſmatis vel pyramidis facta plano baſi parallelo eſt figura prorsùs ſimilis baſi. Etenim ſectionis parallelæ ſingula latera ſunt ſingulis lateribns baſis parallela, cum ſint interſectiones planorum parallelorum cum iiſdem planis. Quarè ſinguli anguli omologi erunt æquales (Prop. 2. cap. præc.) ac proindè ſectio baſi ſimilis eſt.

COR. V. In priſmate ſectio baſi parallela, ipſi baſi æqualis eſt; in pyramide autem latera ſectionis omologa ſunt minora in ratione diſtantiæ ſectionis a vertice ad diſtantiam baſis ab eodem. In priſmate patet æqualitas, cum facies ſint parallelogramma; ac proindè latera ſectionis omologa æqnalia ſunt lateribns baſis, ideòque ſectio prorſns æqualis eſt baſi. In pyramide proportio etiam patet; nam ob ſectionem parallelam, in unaquaqe facie habebuntur triangula duo ſimilia.

COR. VI. Omnia priſmata collata inter ſe atqne etiam omnes pyramides inter ſe comparatæ, ſi ſuper baſibus æqualibus & inter eadem plana parallela conſtituamur, ſpatia ſolida reſpectivè æqualia comprehendunt. Secentur enim quotcumque plana quæ ſint baſibus parallela, ſectiones

unius priſmatis vel pyramidis æquales ſemper erunt ſectionibus reſpondentibus alterius. Nam in priſmate omnes erunt æquales eidem baſi; in pyramide erunt ipſi baſi ſimiles, & ſingula latera in una pyramide erunt ad latera omologa in pyramide altera in eadem data ratione, nempè in ratione diſtantiæ baſis a vertice ad ſectionis diſtantiam ab eodem vertice, quæ quidem ratio eadem eſt, ut patet; cum pyramides terminentur plano, baſium & ſectionum planis parallelo. Porrò ſolida illa concipi poſſunt tanquam compoſita ex iis omnibus ſectionibus quarum ſingulæ cum ſingulis æquales ſint, erunt & ipſa ſolida æqualia.

COR. VII. Pyramides baſium æqualium in eundem apicem deſinentes vel eandem utcumque altitudinem habentes, ſint æquales. Nam per communem verticem ductum intelligatur planum baſium planis parallelum, pyramides ſemper erunt ſuper æqualibus baſibus & in iiſdem planis parallelis. Similitèr ſi baſes in eodem plano conſtituantur, vertices in eadem altitudine ad idem planum baſibus parallelum terminabuntur.

COR. VIII. Si pyramides eandem habeant altitudinem, erunt inter ſe ut baſes. Etenim baſis major diviſa intelligatur,

tur, ſi fieri poſſit, in partes baſi minori æquales, concipi poterit pyramis major tanquam compoſita ex diverſis pyramidibus quæ baſim habeant baſi minori æqualem; ſed pyramides illæ ſingulæ erunt minori pyramidi æquales, ergò pyramis major eſt ad minorem ut pyramidum æqualium numerus in majori pyramide ad pyramidem minorem, hoc eſt, pyramides illæ ſunt inter ſe ut baſes.

At ſi baſis major minorem baſim non contineret accuratè, ſed tamen habeant aliquam communem menſuram; dividi fingantur baſes in partes huic menſuræ communi æquales, jam pyramides duæ tot alias continebunt pyramides æquales quot ſunt in utraque pyramide partes communes, ac proinde pyramides ſunt etiam ut baſes.

Tandem ſi pyramidum baſes forent incommenſurabiles, adhibeatur aliqua menſura quæ minuatur in infinitum donec fiat utriuſque baſis menſura communis, quemadmodum dictum eſt de figurarum ſimilitudine, eodem modo patet in hoc etiam caſu pyramides eſſe inter ſe ut baſes.

PROP. II SOLIDORUM CURVILINEORUM GENESIM EXPLICARE. Si recta ſublimis motu ſibi ſemper parallelo circuli circumferentiam radat, figura ſolida hoc

 motu

motu genita *cylindrus* dicitut. At ſi recta per aliquod punctum fixum & ſublime perpetuò tranſiens, altera extremitate radat circuli circumfereutiam, ſolidum hoc motu genitum *conus* vocatur. Utriuſque figuræ *baſis* vocatnr circulus cujus circumferentiam recta percurrit. Patet cylindrum dnobus circulis, conum autem circulo unico terminari. Recta per utriuſque circuli centrum iu cylindro tranſiens, in cono autem per baſis centrum ipſumque coni verticem *axis* dicitur. Si axis ſit perpendicularis baſi, cylindrus vel conus *rectus* ſolidum geuitum appellatur; ſecùs autem *obliquus* vocatur. Si autem baſis fuerit quævis alia curva, ſolidum dicitur *cylindricum* vel *conoidicum*. Figura 29, refert cyliudrum rectum, figura autem 30 conum rectum repræſeutat. Si ſemicirculus, AHF (Fig. 31) circà immotam diametrum, AB iu orbem ducatur, donec ad priſtinum ſitum redeat, ſolidum indè genitum *ſphæra* dicitur.

COR. I Si baſis primatis vel pyramidis, aucto numero laterum & immiuuta maguitudine in infinitum, abeat in curvam contiuuam, priſma abit iu ſolidum cylindricum, pyramis in conoidicum. Item priſma cujus latera ſuut perpendicularia baſi, mutatur in cylindrum rectum;

pyra-

pyramis verò in qua baſis latera ſunt æqualia & diſtantiæ a vertice æquales, abit in conum rectum.

COR. II. Si ſphæra plano quovis ſecetur, ſectio erit circulus qui erit omnium maximus ſi ſectionis planum tranſeat per centrum ſphæræ, ac deindè erit major vel minor prout planum ſectionis magis vel minùs recedet a centro ſphæræ. Sit enim ſectio, FIH, ad cujus planum ducatur diameter perpendicularis, AB, quæ plano ſecanti occurrat in E. Si punctum E, congruat cum centro, C, patet rectas EI, fore radios ſphæræ. Si autem cadat extrà, in triangulis CEI, CEF, anguli ad E, erunt recti, latus CE, commune & baſis CI = CF; quarè quodvis latus CI = EF ac proindè in utroque caſu ſectio erit circulus cujus centrum E; illud verò centrum in primo caſu coincidet cum centro ſphæræ. Patet autem ob angulum rectum in E, radium circuli, EF, ſemper minorem fore radio ſphæræ CF, niſi radii illi congruant abeunte E in C. Evidens etiam eſt eo minorem fore cordam HF, nempè circuli diametrum quo minor fuerit diſtantia CE.

COR. III. Sphæra conſiderari poteſt tanquam compoſita ex pyramidulis æqualibus numero infinitis & infinitè parvis quarum baſes

baſes ſunt in ipſa ſphæræ ſuperficie, vertex autem communis eſt ipſum ſphæræ centrum.

SCOL. In capite præcedenti ubi priſmata & pyramides inter ſe compatavimus, aliqua dubitatio ſuboriri poſſet, quod nempè ſolida e ſuperficiebus compoſita habere videamur. Et re quidem vera linea producitur motu continuo puncti, ſuperficies motu continuo lineæ, ſolidum motu continuo ſuperficiei; at linea non ex punctis, ſed ex lineolis, ſuperficies ex areolis non ex lineis, ſolidum ex ſpatiolis ſolidis, non ex ſuperficiebus componitur. Neque genuinam linearum, ſuperficierum & ſolidorum notinnem tyronibus proponunt nonnulli magiſtri qui lineas tanquam e punctis, ſuperficies ex lineis, ſolida ex ſuperficiebus compoſita repræſentant. Itaque dum (in cor. 6. cap. præc.) ex ſectionum æqualitate priſmatum & pyramidum æqualitatem concludimus, id non debet intelligi quaſi priſmata & pyramides ex ſectionibus planis componi velimus; nam loco ſectionis unius conſiderari poſſent ſectiones duæ infinitè proximæ quarum (in cit. coroll) eadem foret diſtantia ſivè altitudo, ut patet ex planorum paralleliſmo. Igitur minima ſolida duabus ſectionibus infinitè vicinis comprehenſa forent æqua-

æqualia in caſu propoſito; quarè communem altitudinem negligere licuit ſolamque ſectionum æqualitatem conſiderare; id verò facere nunquam licèt niſi præter ſectionum æqualitatem, æquales etiam ſint binarum quarumcumque indefinitè proximarum diſtantiæ. Porrò evidens eſt hanc methodum ad *exhauſtionum* methodum ſæpiùs explicatam reduci, ac proindè ad ſeveritatem geometricam eſſe omninò compoſitam.

CAPUT II.

De Solidorum menſura.

PROP. I. PRISMATIS CUJUS LATERA RECTILINEA SUNT BASI PERPENDICULARIA SUPERFICIEM METIRI. Singulæ priſmatis facies in hoc caſu ſunt rectangula ſub ſingulis lateribus baſis ſingulisque priſmatis lateribus rectilineis contenta; ideoque omnium hujuſmodi rectangulorum ſumma eſt tota baſis perimeter in latus rectilineum ducta. Quarè priſmatis ſuperficies, demptis baſibus, eſt productum ex perimetro baſis in unum e lateribus rectilineis. Huic producto addatur dupla baſis ſuperficies, habebitur ſuperficies tota priſmatis.

COR. I.

COR. I. Cum ſex quadratis æqualibus terminetur cubus, habebitur tota cubi ſuperficies, ſi quadrati unius ſuperficies ſexies ſumatur. Quia vero parallepipedum ſex terminatur ſuperficiebus quarum duæ quælibet oppoſitæ ſunt æquales, inveniantur tres inæquales ſuperficies illarumque ſumma bis ſumatur, babebitur tota parallepipedi ſuperficies.

COR. II. Cum baſis cyliudri conſiderari poſſit tanquam polygonum regulare ex lateribus numero infinitis & infinitè parvis compoſitum, cylindrus baberi poterit tanquam priſma *infinitilaterum* cujus proindè ſuperficies babebitur, ſi tota baſis perimeter ſeu circuli circumferentia ducatur iu altitudinem & producto addatur dupla baſis ſivè circuli ſuperficies.

PROP. II. PYRAMIDIS CUJUS LATERA OMNIA SUNT ÆQUALIA, ET BASIS LATERA SINT ETIAM ÆQUALIA, SUPERFICIEM INVENIRE. Cum facies omnes pyramidis in hoc caſu ſint triangula iſoſcelia æqualia, erit omnium triangulorum ſumma æqualis dimidio producto ex tota baſis perimetro in perpendiculum ex vertice pyramidis ad latus quodlibet baſis demiſſum; nam triangulum quodlibet æquatur dimidio producto ex latere baſis ducto in ſuum perpendiculum. Hæc autem

tem ſingula perpendicula ſunr æqualia; habebirur ergò in hoc caſu pyramidis ſuperficies, dempra baſi.

COR. I. Conus eſt pyramis *infinitilatera* ac proindè coni recti ſuperficies æqualis eſt dimidio producto ex circumferentia baſis in longitudinem ſivè latus coni, dempta tamen baſi.

COR. II. Si pyramis plano baſi parallelo *truncata* ponatur, facies omnes reliquæ pyramidis verſus baſim abeunt in trapezia æqualia; hæc autem trapezia ſingula dividi poſſuut in triangula duo æqualia quorum baſes ſunt ſectionis & baſis latera, altitudo autem communis eſt ipſarum baſium diſtantia perpendicularis. Quarè ſingulorum triangulorum menſura eſt dimidium productum ex ſingulis baſibus in ipſam baſium diſtantiam, ac proiudè ſuperficies pyramidis truncatæ æquatur dimidio producto ex ſumma perimetri baſis & ſectionis in diſtantiam perpendicularem baſium.

COR. III. Si conus rectus plano baſi parallelo truucatus ponatur, coni hujus truncati verſus baſim ſuperficies æqualis eſt dimidio producto ex peripheriarum ſumma in coni truncati longitudinem ſive latus. Res autem faciliùs obtinetur, ſi inveniatur circulus DE, (Fig.30) cujus periphe-

ria æqualis ſit ſemi ſummæ peripheriarum BC, GM. Sumatur nempè punctum D, medium inter B, G ducaturque recta DE, parallela ſectioni, BC, hæc erit diameter circuli quæſiti. Etenim ductis perpendicularibus Bf, Dh, erit ob triangulorum DBf, DGh, ſimilitudinem Bf: Df = Dh: Gh, ac proindè ob Bf = Dh, erit etiam Df = Gh; quarè eadem eſt differentia inter diametros BC, DE, quæ eſt inter diametros DE, GM; illa nempè differentia eſt dupla rectæ Df vel Gh, ideòque recta, DE, eſt media proportionalis arithmetica inter BC, GM, ſeù quod idem eſt, diameter DE æqualis eſt ſemiſummæ diametrorum BC, GM. Sed circuli ut potè figuræ ſimiles ſuas habent peripherias diametris proportionales (Scol. cap. 3). Ergo circumferentia circuli diametro, DE, deſcripti eſt media proportionalis arithmetica inter circumferentias diametris BC; GM, deſcriptas. Habebitur ergo coni truncati BCGM ſuperficies, ſi multiplicetur circuli medii, DE, circumferentia per latus coni BG.

COR. IV. Si concipiatur cylindrus rectus KQLM (Fig. 32.) circumſcriptus ſphæræ, habens pro axe diametrum AB, pro baſi circulum ſpæræ maximum, ſuperficies ſegmenti ſphæræ HAF, æqualis erit ſuper-

ſuperficiei cylindri QNRK, & area totius ſphæræ æqualis areæ totius cylindri, demptis baſibus. Etenim concipiatur particula quævis, Ff, circuli *genitoris* ita parva ut infinitè accedat ad lineam rectam, productaque, Ff, uſque ad BA in G, recta, FfG, generabit ſuperficiem coni recti, & Ff, ſuperficiem coni truncati; cujus menſura erit ipſa Ff ducta in ſemiſummam peripheriarum quarum radii ſunt EF, ef; ducta autem, PO, ita ut peripheria radio PO deſcripta æqualis ſit ſemiſummæ peripheriarum prædictarum, erit coni truncati ſuperficies ut recta Ff ducta in circumferentiam cujus radius eſt OP. Jam verò ob triangula ſimilia rectangula Gef, GEF, GPO, OPC erit Ee vel Nn : FE = GE : GF = GP : GO = PO : CO vel EN; ob EN = BL = CO; ideòque Nn × EN = fF × PO, atque ideò cum peripheriæ ſint ut radii, erit productum ex Nn, in peripheriam radio, EN, deſcriptam æquale producto ex fF, in peripheriam radio, PO, deſcriptam. Primum autem productum exprimit aream genitam ab Nn, alterùm verò aream genitam ab Ff. Quarè tota area genita a toto arcu AfF, æquatur toti areæ genitæ a recta QN; & abeuntè, REN, in MBL,

 tota

tota ſphæræ ſuperficies totius cylindri ſuperficiei æqualis eſt, demptis baſibus.

COR. V. Superficis ſphæræ æqualis eſt producto ex circumferentia circuli maximi in axem, ſive diametrum ſphæræ, ac proinde circuli maximi ſuperficie quadruplo major eſt (cor. I. prop. 2. cap. 2.)

COR. VI. Superficies tota cylindri circumſcripti, incluſis baſibus, eſt ad totam ſphæræ ſuperficiem ut 3 ad 2. Nam ſuperficies ſphæræ, in hoc caſu, baſi cylindri quadruplo major eſt, ſuperficies autem tota cylindri ſua baſi ſexies major eſt.

PROP. III. Prismatis soliditatem metiri. Polygonum quod priſmatis baſis eſt in ipſam priſmatis altitudinem ducatur, habebitur ſoliditas tota priſmatis, ut patet ex geneſi ipſius ſolidi quod producitur motu patallelo baſis, ac proinde baſis ſive polygoni ſuperficies per altitudinem multiplicari debet.

COR. I. Soliditas cubi habetur multiplicando faciem quadratam baſis per ipſum quadrati latus. Patallepipedi ſoliditas invenitur, ſi patallelogrammi ſuperficies per altitudinem multiplicetur; habetur autem ſoliditas cylindri ſi baſis, circuli nempè ſuperficies, in altitudinem cylindri ducatur.

COR. II. Eadem in ſolidorum menſura ratiocinatione inſtituta quam in metiendis ſuperficiebus adhibuimus, evidens eſt cubum eſſe communem ſolidorum menſuram non ſecus ac quadratum eſt menſura ſuperficierum. Itaque pes ſolidus continet pollices cubicos 1728, nempè tres habet dimenſiones quarum ſingulæ pedi ſive 12 pollicibus æquantur, & ità dicendum de alia qualibet menſura.

PROP. IV. PYRAMIDIS SOLIDITATEM INVENIRE. Si ad centrum I cubi GL fiat quadrata pyramis (Fig. 33) cujus baſis ſit cubi facies quadrata, evidens eſt totam cubi ſoliditatem dividi in ſex hujus modi pyramides quadrilateras, æque altas & æqualium baſium ac proindè æquales. Igitùr pyramis quælibet erit ſexta pars cubi; ſed cubi menſura æqualis eſt producto ex baſi in altitudinem, ergò illarum pyramidum quælibet erit æqualis producto ex baſi in ſextam partem altitudinis HP vel quod idem eſt in tertiam partem altitudinis IP. Ergò hujuſmodi pyramidis ſoliditas æqualis eſt producto ex baſi in tertiam partem altitudinis, ſeù quod idem eſt, æquatur tertiæ parti cubi ejuſdem baſis & ejuſdem altitudinis.

Generatim pyramis quælibet æqualis eſt producto ex baſi in tertiam partem altitu-

dinis, ſive pyramis quælibet eſt tertia pars priſmatis eandem cum ipſa pyramide baſim habentis eandemque altitudinem. Etenim ſit pyramis quælibet, ſingaturque cubus cujus altitudo ſit altitudinis pyramidis dupla. Jam ſi ex centro cubi alia exeat pyramis cujus baſis ſit facies quadrata cubi, evidens eſt hanc pyramidem habere eandem cum propoſita pyramide altitudinem, ac proindè pyramides illæ ſunt inter ſe ut baſes (Cor. 8. Prop. 1. cap. præc.) Sed ſoliditas pyramidis cubi baſi innixæ æqualis eſt producto ex tertia parte altitudinis in baſim, ergò ob altitudinem eandem in utraque pyramide, erit ſoliditas propoſitæ pyramidis æqualis producto ex tertia parte altitudinis in baſim, ideòque generatim pyramis quælibet eſt tertia pars priſmatis ejuſdem baſis & altitudinis.

COR. I. Cum cylindrus tanquam priſma infinitilaterum, itidemque conus tanquam pyramis infinitilatera conſiderari poſſint, erit conus tertia pars cylindri eandem habentis baſim & eandem altitudinem.

COR. II. Cum ſphæra haberi poſſit tanquam compoſita ex infinitis pyramidulis quarum vertex communis eſt in centro ſphæræ, baſes autem omnes ſimul ſumptæ totam occupant ſphæræ ſuperficiem, ſingulæ

gulæ illæ pyramides æquales ſunt producto ex terria parte radii in ſuas baſes, ac proindè tota pyramidum ſumma æqualis eſt producto ex omnibus baſibus ſimul ſumptis, boc eſt, ex ſuperficie ſphæræ in tertiam partem radii. Ergò tota ſphæræ ſoliditas habebitur multiplicando tertiam radii partem per circuli maximi ſuperficiem quater ſumptam.

COR. III. Cum ſoliditas cylindri ſit productum ex diametro in circulum maximum, ſoliditas ſphæræ æqualis eſt duabus tertiis partibus cylindri circumſcripti.

PROP. V. SOLIDA DUO SIMILIA, SUNT IN RATIONE TRIPLICATA LATERUM OMOLOGORUM. Ex ſolidorum definitione & ex præcedentibus propoſitionibus evidens eſt corporis cujuſlibet ſoliditatem eſſe ſemper ut productum ex aliqua ſuperficie in aliquem axem, vel aliquam altitudinem; ſuperficies autem ex duabus dimenſionibus componitur, ergo ſolidum quodlibet eſt in ratione compoſita trium dimenſionum omologarum, ſeu ejuſdem nominis; ſed ſolida *ſimilia* ea dicuntur, quæ ſingulas dimenſiones omologas babent proportionales; Ergo ſolida ſimilia ſunt in ratione compoſita ex tribus dimenſionibus proportionalibus, ac proindè in ra-

tione triplicata unius cujuſlibet dimenſionis omologæ.

COR. I. Sphæræ ſunt in ratione triplicata diametrorum. Etenim ſphærarum ſoliditates ſunt inter ſe ut circuli maximi ſuperficies in radium ducta (Cor. 2. Prop. præc.). Sed circulorum ſuperficies ſunt in ratione duplicata ſemidiametrorum (Cor. 1. Prop. 3. Sect. præc.) ergo ſphæræ ſunt in ratione triplicata ſemidiametrorum vel diametrorum. Idem facilè patet ex ſphærarum ſimilitudine; cum enim ſphærarum ſoliditates per circuli maximi ſuperficiem determinentur, ſintque circuli figuræ ſimiles, evidens eſt ſphæras eſſe ſolida ſimilia ac proindè in ratione triplicata diametrorum.

COR. II. Cubi ſunt ſolida ſimilia, itemque ſimiles ſunt cylindri ſphæris circumſcripti (Cor. 3. Prop. præc.). Ergò cubi ſunt in ratione triplicata laterum, & cylindri ſunt in ratione triplicata diametrorum.

COR. III. Priſmata omnia, ſi inter ſe comparentur, ac pyramides omnes inter ſe, erunt ut producta ex baſibus & altitudinibus; quarè ſi baſes fuerint æquales, erunt ſolida ut ſolæ altitudines; ſi autem altitudines fuerint æquales, erunt ut ſolæ baſes.

baſes. Si ea ſolida fuerint æqualia, altitudines erunt baſibus reciprocè proportionales; & viceverſa, ſi baſes fuerint altitudinibus reciprocè proportionales, ſolida erunt æqualia. Tandèm ſi baſes fuerint ſimiles, & altitudiues lateribus baſium omologis proportionales, ſolida eruut in ratione triplicara larerum omologorum, vel altitudinum.

SCOL. De ſolidorum rectornm ſuperficiebns in capite præcedenti ſermonem habuimus; verùm ſi ſolida fuerint obliqua, ſuperficierum menſura ſublimiorem geometriam aliquando poſtulat. Quod ſpectat ſolida ſuperficiebus plauis terminata, res eſt nullius difficultatis; cum enim ſolidorum illorum facies ſint polygona rectilinea, ad triangulorum ſuperficiem reduci ſemper poterit illorum menſura. Priſmatis cujuſvis exemplo rem illuſtrabimus. Per punctum quodlibet iu aliquo priſmatis latere, traductum intelligatur planum ad latus illud perpendiculare; idem planum alia omnia priſmatis latera ut potè parallela perpendiculariter quoque ſecabit, atque ſectio erit polygonum cujus unumquodque latus ad duo parallela priſmatis latera erit perpendiculare. Quarè ſuperficies uniuſcujuſque faciei æquabitur producto ex unoquoque ſectionis latere in priſ-

priſmat is latus quodlibet, ob laterum omnium æqualitatem, ac proindè priſmatis ſuperficies æquatur producto ex omnibus lateribus ſectionis, hoc eſt, ex tota ſectionis perimetro in priſmatis latus quodlibet. Jam ſi priſma rectum ponatur, planum lateri perpendiculare coincidit cum baſi, ideoque ſuperficies priſmatis æqualis eſt producto ex perimetro baſis in altitudinem, ut ante; quod idem valet in ſuperficie cylindri qui poteſt conſiderari tanquam priſma infinitilaterum. At ſi rectus non fuerit cylindrus, planum per cylindri axem vel latus quodlibet perpendiculariter traductum, ſectione ſua cum cylindro obliquo generabit curvam quæ *ellipſis* vocatur a Geometris, de qua in appendice mox addenda pauca dicemus. Erit autem cylindri obliqui ſuperficies æqualis producto ex ellipſis circumferentia in latus cylindri. Quod ſpectat coni obliqui ſuperficiem, patet eam ad ſectoris circularis ſuperficiem, ut fit in cono recto, reduci non poſſe; cum in cono obliquo æquales non ſint lineæ omnes ductæ ex vertice coni in baſim. Sed hæc pauca monuiſſe ſatis ſit; hæc enim ad geometriæ elementa non pertinent.

AP-

APPENDIX

DE LINEIS CURVIS.

I. LIneæ curvæ notionem ita ſimplicem eſſe jam obſervavimus ut explicatioue ulla vix clarior effici poſſit; quarè, prætermiſſa definitione, de lineis curvis generatim & deindè de parabola & ellipſi pauca exponemus, alia deindè, ubi neceſſitas occurret, demonſtraturi.

In curva qualibet (Fig. 34) recta, AD, lineas parallelas, ut, MM, æqualiter dividens *diameter* curvæ appellatur; *axis* autem vocatur, ſi eaſdem parallelas ad angulos rectos ſecet. Punctnm, A, in axe *vertex* curvæ dicitur; rectæ autem parallelæ, MM, dicuntur *ordinatæ*. Pars diametri vel axis inter punctum, A, & ordinatam comprebenſa dicitur *abſciſſa*. *Æquatio* curvæ appellatur formula algebraica quæ relationem inter ſemiordinatas & abſciſſas exprimit. Ita demonſtratum eſt in circnlo (Fig. 16) quadratum rectæ, EO, æquale eſſe prodncto ex CO, in OL. Jam diameter, CL, dicatur, a, ſitque $CO = x$, & $OE = y$. Erit $OL = a - x$, ac proindè $y^2 = ax - x^2$, qnæ eſt æquatio ad circulum. Ex his evidens eſt ordinatas & abſciſſas curvæ eſſe quantitates indeterminatas; hæ autem

tem determinantur, ſumptis pro arbitrio alterutrius quantitatis valoribus. Ita ſi in æquatione ad circulum, fiat $x = 0, 2, 3, 4$ &c. invenietur $y = 0, 3, 4, \sqrt{21}$ &c. quarè ſi ex ſingulis punctis erigantur perpendiculares hoc modo determinatæ, & per ſingulas perpendicularium extremitates ducatur curva, hæc ad quæſitam curvam eò accuratius accedet quo plures erunt hujus modi perpendiculares. Ordinatæ non ſolum ad axem, ſed ad quamlibet diametrum referri poſſunt, atque etiam initium abſciſſarum non a ſolo diametri aut axis vertice computari poteſt, ſed etiam ab aliis punctis. Ita in circulo abſciſſæ computari poſſunt vel ab ipſo diametri vertice, vel etiam a centro, atque ita prodeunt diverſæ ejuſdem curvæ æquationes. Verùm quocumque modo curva conſideretur, probè diſtingui debent rectæ ad dextram vel ad ſiniſtram jacentes & ideò dicuntur *poſitivæ* vel *negativæ*. Has quidem vel illas appellare licet poſitivas vel negativas, at ubi appellatio determinata eſt hæc ſemper retineri debet; quarè ſemiordinatæ & abſciſſæ poſſunt eſſe vel negativæ vel poſitivæ; ratio autem facilè patet ex iis quæ de quantitatibus poſitivis & negativis in algebra obſervavimus.

II. Curva quælibet conſiderari poteſt vel

vel tanquam curva *polygona*, vel tanquam curva *accurata*. Primus conſiderandi modus nihil aliud ſignificat niſi curvam eſſe polygoni inſcripti & circumſcripti *limitem*. Unum autem probe obſervandum eſt in curvarum conſideratione; ſi nempe curvam aliquam velut polygonam quis tractaverit, caveré deinde debet ne eandem curvam velut accuratam habeat, & viceverſa; atque etiam eadem regula tenenda eſt in duarum curvarum conſideratione, ambæ ſcilicet vel tanquam polygonæ, vel tanquam accuratæ conſiderari debent; inde enim in rebus phyſicis orti ſunt errores aliqui. Rem exemplo demonſtrabimus. In circulo quocumque PQD (Fig. 35) ducantur cordæ æquales & infiniteſimæ PD, DE, producaturque PD in O, donec DO = PD Præterea agantur per puncta O, E, recta OQ, & per punctum, D, tangens, DN, rectæ, OQ, occurrens in N, erit OE = 2NE. Etenim triangulum, DOE, eſt iſoſcele; præterea anguli, ODE, menſura eſt dimidius arcus PDE; anguli autem, NDE, menſura eſt dimidius arcus DE; ergo recta, DN, æqualiter dividit angulum ODE, ideoque ob DO = DE, erit OE = 2NE. Jam ponatur corpus aliquod deſcribere arcum circuli infiniteſimum

ſimum PDE, vi aliqua urgente ſecundùm directionem datam quæ in loco, D, corpus a linea recta retrahat. Si conſideretur circulus tanquam polygonum, corda infiniteſima, PD, erit *ſpatiolum* tempore præcedenti infiniteſimo percurſum, eritque DO lineola æqualis & in directum poſita ſpatiolum alterum tempore ſubſequenti æquali deſcriptum. Quarè ſi ducatur, OE, directioni vis in, D, agentis parallela, erit hæc lineola, OE, vis hujus effectus; vi enim illa corpus ex, O, tranſit ad arcum circuli. At ſi conſideretur circulus tanquam accuratus, tangens, DN, erit lineola vi urgente deſcripta, ideòque, NE, vis hujus effectus. Itaque in curva polygona vis effectus repreſentatur per, OE, & in curva accurata per NE. Quarè in virium menſura retinenda eſt eadem curvarum conſideratio, aliòqui effectus duplo major æſtimaretur. Verum quia in virium doctrina ipſarum virium effectus duntaxat comparamus, res periudè ſe habet, quæcumque adhibeatur curvarum conſideratio, eadem enim prodit effectuum proportio. Hæc autem quæ modo explicavimus referuntur ad virium centralium doctrinam in phyſica generali demonſtrandam.

III. Hæc eadem doctrina ad curvam quam-

quamlibet transferri poteſt ; quod ut intelligatur, curvarum deſcription em generatim conſiderabimus. Curva quælibet plana conſiderari ſolet tanquam motu puncti, & perpetua directionis mutatione in plano genita; hic non agimus de curvis quarum puncta ſingula in eodem non ſunt plano, & ideò dicuntur *duplicis curvaturæ*. Itaque evidens eſt curvam quamlibet ad lineas duas in plano poſitione datas, ordinatas nempè & abſciſſas referendam eſſe ; ad determinandam nempè alicujus curvæ naturam, oportet puncti mobilis veſtigia ſecundùm certam eandemque legem ad rectas poſitione datas referri ita ut punctum illud ſecundum eandem omninò legem in quolibet infiniteſimo mutatæ directionis angulo moveatur; alioqui non eandem ſed plures curvas deſcriberet (contrà hyp.). Ex hac curvarum conſideratione aliqua ſanè utiliſſima colliguntur. 1°. recta curvam quamlibet in unico puncto tangit. Ponamus enim rectam in duobus tribuſve punctis contiguis curvam tangere, jam punctum mobile directionem perpetuò non mutaret, quod repugnat .... 2°. Si deſcriptus intelligatur circulus qui communem cum data curva tangentem in aliquo puncto habeat, ita ut cujuſcumque circuli minoris

ris eandem habentis tangentem arcus aliquis utrinque circà punctum contactus ſit intrà curvam, cujuſcumque verò circuli majoris arcus ſit extrà curvam, hunc circulum dicimus curvæ *oſculatorem* in dato puncto, & curvæ ipſius *curvaturam* dicimus *circulari curvaturæ analogam*. Evidens autem eſt ex geometriæ elementis circuli oſculatoris centrum poſitum eſſe in concurſu duarum perpendicularium ad eandem curvam, ubi puncta duo curvæ ad ſe invicem in infinitum accedunt; hæc enim eſt circuli proprietas ut rectæ a centro ad peripheriam ductæ ſint ipſi peripheriæ perpendiculares; talis autem recta è centro circuli oſculatoris ad curvam ducta vocatur *radius oſculator* .... 3°. Quamvis inter tangentem & arcum circuli tranſire poſſint alii circuli innumeri, attamen inter arcum curvæ & arcum circuli oſculatoris nullus alius circulus tranſire poteſt; nam (ex def.) quicumque minor circulus eſt intrà curvam, quicumque major eſt extrà ipſam. Tota circulorum oſculatorum utilitas eò reducitur ut omnium curvarum arcus infiniteſimus conſiderari poſſit tanquam circularis. Etenim arcus infiniteſimus circuli oſculatoris & arcus infiniteſimus curvæ eaſdem habent proprietates, cum radius ſit ad circulum oſculatorem
&ad

& ad arcum infiniteſimum curvæ perpendicularis .... 4°. Hinc definiri poteſt curvarum in quolibet puncto curvatura; ſatis enim erit diverſas circulorum oſculatorum curvaturas inter ſe comparare; quod quidem facilè fieri poteſt. Etenim evidens eſt diverſorum circulorum curvaturas eſſe in ratione reciproca radiorum; quod ut intelligatur, fingamus duas rectas æquales in circulum flecti, unam quidem in totam circumferentiam, alteram verò in ſemicircumferentiam tantum; manifeſtum eſt ſemicircumferentiam duplò minus curvam eſſe quam circumferentiam integram; & duplo major eſt radius circuli ad quem ſemicircumferentia illa pertinet. Idem ſimili ratiocinatione patet, ſi recta eadem in arcum duplo vel triplò majorem incurvetur, & ita deinceps. Sed rem generatim demonſtrabimus. Sint duo circuli inæquales C, c, quorum radii R, r, ponantur in data ratione, m, ad n. In his circulis capiantur arcus æquales, dicaturque A, arcus in majori circulo &, a, arcus in minori; arcus, A curvatura minor erit curvatura arcus æqualis, a, in ratione R ad r. Jam verò in circulo majori capiatur arcus, A, qui ſimilis ſit arcui, a, in minori circulo, erit A : a = C : c = R : r. Quarè cum ſit a = A,

erit etiam A : a = R : r = m : n. Igitur ſi arcus A ſimilis arcui, a, contineat partes vel gradus, m, arcus, A, continebit partes vel gradus n, ac proindè curvatura arcus, a, eſt ad curvaturam arcus, A, ut m ad n. Quarè eadem manente arcuum A, a, magnitudine, circulorum c, C, curvaturæ ſunt in ratione m ad n, hoc eſt in ratione reciproca radiorum. Comparari ergò inter ſe poſſunt diverſæ curvarum curvaturæ atque etiam variæ ejuſdem curvæ in diverſis punctis curvaturæ; inveniatur nempè in diverſis punctis radius circuli oſculatoris, hoc eſt, circuli qui curvam in dato puncto tangens, cum ipſa curva ita congruat ut inter curvam & circulum nullus alius circulus tranſire poſſit. Et quidem cum aucto vel diminuto circuli radio, minuatur vel augeatur per gradus illius curvatura, ſi nullus ſit circulus qui propius quam circulus oſculator ad curvam accedat, concludendum eſt circulum cum ipſa curva in hoc puncto eandem habere curvaturam. Ex his patet finitam eſſe curvæ alicujus curvaturam, ſi finitus ſit radius oſculator; at ſi radius oſculator ſit infinitus, curvatura eſt nulla; tandem ſi radius oſculator = 0, curvatura eſt infinita. Cæterum hæc omnia facilius intelligentur, ſi revocentur in memoriam quæ de

de methodo *exhauſtionum* & de *primis* ac *ultimis rationibus* jam explicata ſunt. Hæc pauca quorum uſus in phyſicis inſtitutionibus recurret ex ſublimiori doctrina delibaſſe ſatis ſit, ſupereſt ut parabolæ & ellipſeos naturam breviter exponamus.

IV. Si in axe AD (Fig. 34) ſumantur abſciſſæ quotlibet & ad ſingula puncta erigantur ſemiordinatæ, ea lege ut abſciſſæ ſemper ſint ut quadrata ordinatarum, curva per ſingulas ordinatarum extremitates tranſiens dicitur *parabola*. Jam abſciſſa dicatur x, & ordinata y, erit ſemper x, ut y^2, ac proindè ratio ordinatarum ad abſciſſas conſtans & eadem manet; quarè ſi, p, ſit quantitas conſtans, erit $\frac{y^2}{x} = p$, ac proindè $y^2 = px$, quæ eſt æquatio ad parabolam; nempe in omni parabola quadratum ordinatæ æquale eſt producto ex abſciſſa in quantitatem conſtantem; hæc autem quantitas conſtans *parameter* dicitur. Si in axe parabolæ abſcindatur recta AF quæ ſit quartæ parametri parti æqualis, punctum, F, parabolæ *focus* appellatur.

COR. I. Quoniam creſcente abſciſſa, creſcit etiam quadratum ordinatæ, evidens eſt parabolam non eſſe curvam in ſe redeuntem, ſed puncta illius ſingula ab axe perpetuò recedere in infinitum.

COR. II. Data abſciſſa qualibet ejuſque ordinata, inveniri ſemper poterit parameter, cum ſit tertia proportionalis ad ordinatam & abſciſſam.

COR. III. Si abſciſſa ponatur $= 0$, fit quoque ordinata perpendicularis MM $= 0$, ac proindè puncta M, M, coeunt in A, nempe in axis vertice. Quarè ſi per verticem parabolæ ducatur recta ordinatis parallela, hæc erit tangens parabolæ in puncto A.

COR. IV. Ducta intelligatur ſecans per punctum N, quæ parabolæ occurrat in alio puncto t, ex quo demittatur perpendicularis, tp, ad quam ex puncto, N, erigatur perpendicularis Nq, axi parallela, ſit $pT = s$, $Ap = x$, $pt = y$, Nq vel $Pp = f$, erit $qN = \frac{fy}{s}$, ob triangulorum TNP, Nqt, ſimilitudinem, ac proindè $pt = y + \frac{fy}{s}$ & $Ap = x + f$. Jam ſumatur æquatio ad curvam in puncto, t, erit $pt^2 = Ap \times p = y^2 + \frac{2fy^2}{s} + \frac{f^2y^2}{s^2} = px + pf$, deletiſque in hac æquatione terminis æqualibus $y^2 = px$, fiet $\frac{2fy^2}{s} + \frac{f^2y^2}{s^2} = pf$, & dividendo per, f, erit $\frac{2y^2}{s} + \frac{f^2y^2}{s^2} = p$.

$= p$. Iam puncta N, t ad ſe invicem accedant in infinitum mutòque coeant, ſecans abit in tangentem fitque, Nq vel $Pp = o$; quarè $f = o$ & $\frac{fy^2}{s^2} = o$, ac proindè æquatio præcedens abit in hanc $\frac{2y^2}{s} = p$, & $2y^2 = ps$, ſeù ob, $px = y^2$, fiet $2px = ps$, $2x = s = PT$. Igitur in parabola recta, PT, quæ *ſubtangens* dicitur dupla eſt abſciſſæ AP.

COR. V. Recta, FN, ducta ex foco parabolæ ad extremitatem ordinatæ cujuſlibet, æqualis eſt abſciſſæ AP & quartæ parti parametri. Nam cum ſit $PF = AP - AF = x - \frac{1}{4}p$, vel $= \frac{1}{4}p - x$, prout ordinata jacet ſuprà vel infrà punctum F, erit $PF^2 = \overline{AP - AF}^2 = x^2 - \frac{1}{2}px + \frac{1}{16}p^2$. Præterea $PN^2 = px$, ergò $FN^2 = PF^2 + PN^2 = x^2 + \frac{1}{2}px + \frac{1}{16}p^2$ & $FN = x + \frac{1}{4}p = AP + AF$.

COR. VI. Si per punctum contactus ducatur recta QS axi parallela, angulus GNS, æqualis eſt angulo FNT; nam angulus GNS æquatur angulo FTN; præterea triangulum FTN eſt iſoſcele, ob $FN = AP + AF = AT + AF = FT$, ac proindè angulus GNS æqualis eſt angulo FNT. Hæc eſt tangentis proprietas quæ in phyſicis inſtitutionibus erit utilitatis maximæ.

V. Si

V. Si in axe HI ſumantur abſciſſæ quotlibet, & ad ſingula puucta erigantur ordinatæ FN, PM, ea lege ut ſit ſemper FN^2 ad PM^2 in ratione $HF \times FI$ ad $HP \times PI$, curva per ſiugularum ordinatarum extremitates tranſiens vocatur *Ellipſis* quæ iu circulum abit, ſi quadrata ordinatarum ſiut æqualia producto ex ſegmentis abſciſſarum. Jam dicatur axis major $HI = a$, ducaturque ex puncto axis medio C, recta, BCD, quæ dicitur axis minor, ſitqne $BC = b$, $HP = x$, $PM = y$, $PI = a - x$, erit $\overline{a - x} \times x : y^2 = a^2 : b^2$ & $y^2 = \frac{ab^2x - b^2x^2}{a^2}$, quæ eſt æquatio ad ellipſim in qua ſi pouatur $a = b$, fit $y^2 = ax - xx$, æquatio ad circulum. Si abſciſſæ computeutur a ceutro, C, ſit $CP = x$, $PM = y$, ſiatque $HI = 2a$, erit in boc caſu, $aa - xx : y^2 = aa : bb$, & $y^2 = b^2 - \frac{b^2x^2}{a^2}$. Si ex minoris axis extremitate, B, tanquam ceutro & intervallo $BF = CH$, tanquam radio deſcribatur arcus circuli, axi majori occurrens in puuctis F, f, puncta illa vocantur ellipſeós *foci*; evidens autem eſt hæc puncta a centro ellipſeos æqualiter diſtare; uam ob, BC, axi perpeudicularem, triangula CBF, CBſ, ſunt æqualia.

COR. I.

COR. I. Com duo ellipſeos axes ſint conſtaotes, conſtaos etiam eſt recta iiſdem duobus axibus tertia proportionalis; hæc autem linea *parameter* dicitur. Quia autem duo ſunt ellipſeos axes, duæ etiam ſunt parametri; ſi nempè axis major ſit primus proportioois terminus, tertia proportionalis parameter axis majoris dicitur, & contra. Jam ſi abſciſſæ ab axis extremitate computeotur, ſit axis major, a, minor, b, parameter, p, erit $ap = b^2$. Si autem abſciſſæ computentur a centro, ſit 2a axis major & 2b axis minor, erit $2ap = 4b^2$; his autem valoribus io utraqoe æquatione ad ellipſim ſubſtitutis, æquatio ellipſeos in primo caſu ſit $y^2 = px - \frac{px^2}{a}$; in caſu altero habetur $y^2 = \frac{1}{2}ap - \frac{px^2}{2a}$.

COR. II. Ex ellipſeos æquatione evidens eſt eam eſſe curvam in ſe redeuntem & uodique terminatam; creſceotibus eoim abſciſſis a centro computatis decreſcunt ordinatæ, ac tandem omninò evaneſcunt, ſi abſciſſa ſemiaxi æqualis ſumatur. Manifeſtum etiam eſt mutoa axium in centro, C, interſectione, ellipſim in quatuor partes ſimiles & æquales dividi, eum cadem ſit adquamlibet partem corvæ æquatio omneſque proprietates perindè ſe habeant. Quia verò ordi-

ordinata perpendiculari Nn, perpetuò decreſcente, puncta N, n, coeunt in H, patet taugentem in, H, eſſe axi perpendicularem.

COR. III. Diſtantia focorum a centro facilè invenitur; nam cum ſit $BF = HC$, erit $FC^2 = HC^2 - BC^2 = \overline{HC - BC} \times \overline{HC + BC}$. Quarè diſtautia foci a centro eſt media proportionalis inter ſemiaxium ſummam illorumque differeutiam. Præterea ob triangulum BCF rectangulum, erit $BC^2 = HC^2 - FC^2$, ac proindè $HC - FC : BC = BC : HC + FC$, ſeù $HF : BC = BC : FI$, nempè ſemiaxis minor eſt medius proportionalis inter foci unius diſtantias ab utroque axis majoris vertice.

COR. IV. Ex ellipſeos conſtructione, ſumma rectarum BF, Bf æqualis eſt axi majori; at ponamus eandem manere ſummam in quolibet puncto, ſitqne $BF + Rf = HI$. Dicatur $HC = a$, $BC = h$, ordinata $RS = y$, $CS = x$, $fC = c$; erit $IS = a - x$, $HS = a + x$, $fS = c - x$, $FS = a + x$, HF vel $It = a - c$, Hf vel $IF = a + c$. Jam verò cum ſit (per hyp.) $FR + fR = 2a$, ſi differentia inter FR & fR dicatur $2z$, erit $fR = a - z$, & $FR = a + z$. Jam ob triangula FRS, fRS, rectangula, erit $fS^2 + SR^2 = fR^2$, hoc eſt cc

— 2cx

$- 2cx + x^2 + y^2 = a^2 - 2az + z^2$. Præterea $FS^2 + IR^2 = FR^2$, hoc eſt, $c^2 + 2cx + xx + y^2 = a^2 + 2az + zz$; habentur ergò æquationes duæ quarum prima a ſecunda ſubtrahatur, fiet $4cx = 4az$ & $z = \frac{cx}{a}$ quo valore ſubſtituto in prima æquatione loco, z, ideòque & $\frac{c^2x^2}{a^2}$, loco z^2, erit $- 2cx + xx + yy = aa - \frac{2acx}{a} + \frac{c^2x^2}{a^2}$, factaque, ut moris eſt, reductione habebitur $a^2c^2 + a^2x^2 + a^2y^2 = a^4 + c^2x^2$ & $a^2y^2 = a^4 - a^2c^2 - a^2x^2 + c^2x^2$, factaque diviſione per $a^2 - c^2$, habetur, $\frac{a^2y^2}{a^2 - c^2} = a^2 - x^2$; loco b^2, ſubſtituatur $a^2 - c^2$, fiet $\frac{a^2y^2}{b^2} = a^2 - x^2$, & tandem $= \frac{a^2b^2 - b^2x^2}{a^2}$; quæ eſt æquatio ad ellipſim ante inventa. Hæc ergò eſt ellipſeos proprietas ut ductis ex utroque ſoco rectis ad punctum perimetri quodlibet concurrentibus, rectarum illarum ſumma ſit axi majori ſemper æqualis. Hanc eandem proprietatem ex æquatione ellipſeos derivare facilè eſt; verùm ex proprietate ipſa æquationem elicere placuit ut exemplum eſſet Tyronibus qua ratione ad æquationem curvæ ex data ali-

qua proprietate pervenire liceat. Hinc evidens eſt datis duobus ellipſeos axibus, ellipſim facili manu deſcribi poſſe; ſumptis nempè in axe majori duobus punctis tanquam focis, his affixum retineatur filum, atque per fili longitudinem ita promoveatur acus aliqua ut filum perpetuò tenſum maneat, acus motu ſuo ellipſis peripheriam percurret, ut patet ex perpetua partium fili & axis æqualitate.

COR. V. Si ex puncto R, in ellipſeos perimetro ad utrumque focum f, F ducantur rectæ FR, fR & in linea producta, FR, ſumatur RT = Rf, ducaturque Tf ad quam per punctum medium E & per punctum, R, agatur, ER, hæc erit tangens in R. Etenim ponamus rectam, ER, ellipſi occurrere in alio puncto, r. Ex hoc puncto, r, in recta, RE, agantur lineæ, rT, rf, rF. Quoniam (per conſtr.) TR = Rf & fE = ET, erit RE, perpendicularis ad fT, ac proindè ſingula puncta rectæ, ERr, æqualiter diſtant a punctis f, T, ideòque rf = rT. Sed Fr + rT major eſt quam FT, ergo etiam Fr + rf major eſt quam FT, ideòque etiam major quam Hl; cum (per conſtr.) ſit FT = Hl; quarè punctum, r, non pertinet ad ellipſim; ergò recta RE, tangit ellipſim in unico puncto R. Hæc eſt utiliſſima in phy-

phyſicis inſtitutionibus tangeutis proprietas, quam quidem ex ellipſeos æquatione, non ſecus ac in parabola fecimus, eruere licebat; ſed diverſas veritatis inveuiendæ vias tyronibus demonſtrare maximè convenit.

SCOL. Parabolæ & ellipſeos æquationem conſideravimus, ordiuatis ad axem relatis. At ex demonſtratis facilè erit curvarum illarum æquatioues invenire, ſi ordiuatæ ad diametrum quamlibet referantur; eadem eſt in ſingulis caſibus curvarum illarum natura; primarias duutaxat proprierates demonſtraſſe ſatis ſit, alias enim, ubi neceſſitas poſtulaverit, iu phyſicis inſtitutionibus explicabimus. Præterea etiam ad exercendum acuendumque ingeninm aliqnid tyronibus relinquere opportuniſſimum eſt, idque poſtulat recta docendo ratio. *Sectiones conicæ* appellautur parabola & Ellipſis quibus etiam annumerari debet *hyberbola* de qua nullum verbum fecimus, ut potè nulliùs ferè uſus in noſtris phyſicis inſtitutiouibns futnra. Denominationis ratio facilè patebit ſi tres illas curvas iu coni ſectione conſideremus.

Sit ABC conus (Fig. 35) circulari baſi inſiſtens, & ſecetur plano quolibet IEM. Pouatur ſectio alia KILM parallela baſi & occurrens priori ſectioni in HI, intelli-

gaturque ſectio tertia priores duas in EH & KL, perpendiculariter biſecans atque etiam conum in triangulo ABC. Jam producto EH donec ipſi AK occurrat in D, ductiſque EF ac DG rectæ, KL, parallelis & occurrentibus ſectioni triangulari in F & G, dicatur $EF = a$, $DG = b$, $ED = c$, $EH = x$, & $HI = y$, ob triangulorum EHL, EDG ſimilitudinem, erit ED $(c) : DG\,(b) = EH\,(x) : HL = \frac{bx}{c}$. Simili modo ob triangulorum DEF, DHK ſimilitudinem erit DE $(c) : EF\,(a) = DH\,(c-x)$ (Fig. 36) vel $c+x$ (Fig. 37): $HK = \frac{ac \mp ax}{c}$: tandem cum ſectio KIL parallela baſi ſit circulus, ut patet ex geneſi ipſius coni, erit $HK \times KL = HI^2$, hoc eſt $\frac{abx}{c} \mp \frac{abxx}{cc} = yy$; at ſi ponatur ſectionem ità ſe habere, ut ED non occurrat lateri AK, ſed ſit ipſi parallela, tunc erit $HK = EF = a$, ideòque $HK \times HL = HI^2$, hoc eſt $\frac{abx}{c} = y^2$. Si æquationes illas ſeorſim conſideremus, evidens eſt figuram 36. ellipſim referre, cum quadrata ordinatarum ſemper ſint ut productum ex ſegmentis abſciſſarum. Figura 37. refert curvam quæ *hyperbola* dicitur; in hac autem

tem curva non ſecùs ac iu ellipſi quadrata ordiuatarum ſunt nt productum ex ſegmentis abſciſſarum; ſed probè notaudum eſt diſcrimen. Sectio conica eſt ellipſis, ſi planum ſecans ſectioni triangulari perpendiculare, duohus coni lateribus occurrat; at ſectio conica ſit hyperbola, ſi plauum ſecans neque ſit coui lateribus parallelum, neqne duo ſecet coni latera; ſed in hoc caſu ſectio ita ſe habet nt planum ſecans productum, cono ad verticem oppoſito occurrat in, D, alteraqne ſectione generet hyperbolam oppoſitam. Recta, DE, dicitur *axis tranſverſus*, punctum hujus axis medium vocatur *centrum* hyperbolarum, per quod ſi ducatur hiuc & inde rectà perpendicularis, ea proportione ut prodnctum ex ſegmentis abſciſſarum ſit ad quadratum ordinatæ, ſicut eſt quadratum axis tranſverſi ad quartum terminum proportioualem, hahebitur quadratum axis qui *conjugatus* vel *ſecundus* axis appellatur. Igitur in æquatione ad hyperbolam punctum, D, ſumitur in hyperbola oppoſita & productum ex ſegmentis abſciſſarnm eſt, DH × EH (Fig. 37). Tertiam æquationem $\frac{abx}{c} = y^2$ eſſe ad parabolam cujus paramiter $\frac{ab}{c}$ ex antea demon-

ſtratis

ſtratis evidens eſt. In hac antem curva planum ſecans eſt alterutri lateri coni parallelnm. Itaqne cnm ex coni ſectione natæ ſint tres illæ curvæ, patet cur illis factum ſit *ſectionum conicarum* nomen. Sed hæc breviter dicta ſint, ut algebræ uſus in geometria Tyronibns oſtendatnr.

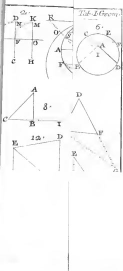
FINIS

ERRATA

Pag. 56. lin. 23. $\frac{n}{10^n}$ leg. $\frac{r}{10^n}$
57. 2. 9 leg. q.
73. 1. $\sqrt{c}$ leg. $c\sqrt{c}$
80. 4. $\frac{x}{2}n + 1$, leg. $\frac{x}{2} - n + 1$
85. 5. br, leg. b.
90 22. 1^n, leg. r^n
93. 25. & 100, leg. & 1000
107. 6. $- x + =$, deleatur $+$
108. 4. $= + \sqrt{\frac{pp + q}{4}}$ leg. $\pm$
108. 11. quæſtione, leg. æqnatione
134. 29. $+$ DF, leg. $\frac{1}{2}$ DF
135. 1. Fig.6. leg. Fig.7.
150. 23. radi. leg. radix.
154 4. in K. leg. in L
163. 21. Fig. 21. leg. 22.

In figura 26. ſuppleri debet littera I ubi recta BC, interſecat cordam FK.

224 58252


Tab. I. Geom.
2.
6.
8.
12.

ilizec

5.8.202
226

Digitized by Google

227

2

005654227

Digitized by Google

CB

Google